CONSEIL SUPÉRIEUR DES PROGRAMMES

Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C 2, C3 et C4

Christine Chambris,

Maître de conférences,
Laboratoire de didactique André Revuz,
Université de Cergy-Pontoise

Contribution à propos de la numération décimale

octobre 14

Contribution à propos de la numération décimale

Christine Chambris, Laboratoire de didactique André Revuz, Université de Cergy-Pontoise

29 octobre 2014 – version définitive.

A propos de ce texte

Le plan de cette contribution

J'ai structuré ma contribution pour faire ressortir ce qui me paraît essentiel relativement à l'enseignement de la numération décimale, tout en indiquant assez explicitement des éléments de réponse à la plupart des questions au fil du texte.

Après avoir indiqué ma position par rapport à la conférence nationale et ma position de chercheur pour penser une continuité du curriculum, j'évoque d'abord longuement le « problème de la numération décimale ». Cette première partie relative à la numération est destinée à décrire le plus précisément possible l'état actuel de l'enseignement de la numération décimale. Une partie des éléments avancés est nouveau par rapport à ce que j'ai écrit ailleurs. La seconde partie du texte propose une réflexion sur des évolutions possibles. J'y indique ce qui pourrait constituer des « situations exemplaires ». Je pose quelques questions relatives à des éléments à prendre en compte pour l'évolution des pratiques de classe. Je termine en donnant quelques éléments liés à la formulation des programmes et au socle.

A propos de la conférence nationale

Mes recherches portent sur les relations entre grandeurs, nombres et opérations dans l'enseignement et sur l'enseignement de la numération décimale. Elles m'ont amenée à étudier précisément les relations entre système métrique et numération. J'ai développé principalement cet aspect lorsque j'ai parlé à la conférence nationale et dans le document que j'ai écrit pour accompagner les programmes 2008 dans « le nombre au cycle 3 » (texte de 2012-c). Renforcer les liens entre numération et système métrique dans l'enseignement peut consolider à la fois la numération et le système métrique, c'était l'objet de ces contributions précédentes. J'ai retravaillé le texte d'accompagnement des programmes pour la revue Grand N (Chambris, 2012b) en mettant davantage en avant la numération.

Toutefois, le problème de l'enseignement de la numération décimale doit être pris en charge pour lui-même. C'est le but de la présente contribution. Elle apporte des éléments nouveaux relatifs à l'état du système d'enseignement pour la numération décimale. On le verra, ce sont d'ailleurs plutôt les liens entre nombres décimaux et nombres entiers qui en constituent le cœur.

Un autre aspect de ma contribution à la conférence nationale concernait les grandeurs. Pour ce qui me concerne, je suis toujours d'accord avec ce que j'ai écrit à propos des grandeurs, dans une large concertation avec MJ Perrin et F Ligozat me semble-t-il même si nous n'avons pas réussi à cosigner nos textes. Je souhaiterais, pour une autre vie, qu'il y ait des gens qui réfléchissent à l'introduction précoce de l'algèbre dans les programmes français. Il existe notamment des travaux très intéressants relatifs à l'introduction précoce de l'algèbre à partir des grandeurs, dès le CP (dans la suite des travaux de Davydov 1975). C'est dans certains programmes d'enseignement depuis 40 ans.

Pour la consultation relative aux nouveaux programmes, pour ce qui concerne les grandeurs, je renvoie au texte Marie-Jeanne Perrin avec lequel je suis largement en accord.

Dans ce texte, à plusieurs reprises, je me positionnerai à propos d'éléments avancés par Brissiaud au cours des auditions pour la conférence nationale.

Ma position de chercheur pour penser une continuité du curriculum

En quelques mots, j'indique un fil conducteur de mes travaux relativement à la continuité du curriculum :

- J'ai une hypothèse de travail : un curriculum cohérent facilite le travail des enseignants. Sur le plan méthodologique, cette hypothèse est très compliquée à prouver. Il existe quelques travaux sur cette question mais peu. Ca n'est pas une évidence car on sait que les pratiques des enseignants sont déterminantes dans les apprentissages des élèves et qu'elles sont loin d'être déterminées uniquement par le curriculum.

- Pour moi, une façon de penser un curriculum cohérent est d'avoir une théorie mathématique *adaptée* en arrière-plan, ce que j'appelle les savoirs savants du second ordre. (Chambris 2010)

- De tels savoirs me permettent et, je le pense, devraient aussi permettre aux enseignants d'avoir des repères pour penser un curriculum dans sa continuité. Néanmoins, de tels savoirs ne constituent en rien l'intégralité du curriculum. En outre, si on veut modifier le curriculum en faisant pénétrer ces savoirs, même *a minima*, il faut nécessairement penser la distance avec le curriculum et les pratiques existants.

Sur le plan historique, il a existé des traités – des textes de référence pour la formation dont la durée de vie était de plusieurs dizaines, voire centaines d'années – qui contenaient de tels savoirs de référence, avant la réforme des mathématiques modernes. Et ça n'est plus le cas, depuis les années 1970. Entre autres, d'après mes lectures et recherches, ils contribuaient à 1) l'articulation des savoirs d'un niveau de classe à l'autre – au sein de l'école primaire -, 2) la stabilité des discours des manuels (et donc probablement de ceux des enseignants), 3) l'articulation des savoirs entre plusieurs domaines (par exemple, nombre et calcul, sens des opérations et calcul, système métrique et numération).

Qu'on ne se méprenne pas : je n'ai pas de nostalgie pour et je ne préconise pas un retour à l'école des années 50. Ce serait d'ailleurs impossible.

L'élaboration des savoirs du second ordre relève de la recherche, en ce sens que ce n'est pas le métier de l'enseignant que d'élaborer ses propres savoirs du second ordre. Le travail avec des enseignants et des élèves est nécessaire néanmoins dans cette élaboration. En outre, il peut arriver qu'un même individu soit à la fois, chercheur et enseignant, voire enseignant engagé dans l'élaboration de savoirs du second ordre ! Pour de multiples raisons, cette élaboration est complexe. Et forcément, comme les pratiques des enseignants sont complexes, une fois ces savoirs élaborés il est compliqué de leur faire pénétrer le système d'enseignement, jusqu'aux pratiques des enseignants.

Numération décimale

L'enquête récente de la DEPP (2014, NI 14.19 de mai 2014) sur l'enseignement des mathématiques donne des résultats globaux sur les évolutions des connaissances des élèves de CE2 entre 1999 et 2013, elle indique une stabilité ou une légère baisse de la réussite sur les items testés, en moyenne de 2% (baisse moyenne qui pourrait être intégralement liée à la méthodologie de l'enquête et non aux résultats des élèves, comme l'indiquent les auteurs de la note : ce peut être un effet de l'évolution des modalités de correction). Les scores de réussite de certains items sont en hausse et d'autres en baisse. Les deux items dont les scores ont le plus baissé sont deux items relevant de la numération décimale des entiers avec une baisse de 14% pour l'un, de 10% pour l'autre entre 1999 et 2013.

La directrice de l'école a 87 lettres à envoyer. Elle doit mettre un timbre sur chaque lettre. Les timbres sont vendus par carnets de dix timbres. Combien de carnets doit-elle acheter ? (32% à 18%)

Lis les nombres et écris-les en lettres. 615 ………………… (82% à 72%).

Depuis plusieurs années, des travaux convergents de didactique des mathématiques mettent en évidence des changements importants dans le curriculum de la numération décimale des entiers depuis un siècle avec un basculement dans les années 1970, puis 1980 (Chambris 2008, soumis), et des dysfonctionnements liés aux savoirs intervenant dans l'enseignement actuel de la numération décimale des entiers (Chambris 2008, 2012a, Mounier 2010, Tempier 2013, Houdement & Chambris 2013) aussi bien dans la classe, que dans les manuels, que dans les programmes. Quoi qu'il en soit, les relations de causalité entre évolutions curriculaires et performances des élèves sont extrêmement difficiles à établir. Des recherches sont en cours pour essayer de faire évoluer le curriculum – localement -. Pour le moment, on observe surtout que c'est compliqué de changer les choses.

Il est admis que la connaissance des nombres est susceptible d'influencer les apprentissages en calcul. Des enquêtes à grande échelle plus ou moins récentes révèlent des baisses dans l'apprentissage du calcul ou des mathématiques. Quoi qu'il en soit, je crois qu'il n'est pas aisé d'interpréter ces résultats. Un autre regard sur les résultats de l'enquête CE2 (DEPP 2014) montre par exemple qu'à l'exception de la tâche simple « écrire 615 », ce sont essentiellement les tâches complexes (tant en calcul, qu'en gestion de données, qu'en géométrie ou la résolution de problèmes d'arithmétique) qui ont le plus baissé et que ce sont les calculs simples de soustractions qui ont le plus progressé (calcul mental ou posé). Il est alors utile de se souvenir que l'enseignement de la technique opératoire de la soustraction était, avant 2008, programmé seulement au cycle 3. L'enquête « à vingt ans d'intervalle » de la DEPP (2008) met en évidence une baisse importante dans l'apprentissage du calcul pour les entiers et pour les décimaux entre 1987 et 2007. Chesné (2014), dans sa thèse récente, semble relever une baisse modeste sur les entiers et plus forte sur les décimaux. Des modifications structurelles ont affecté l'école primaire depuis 1987 : création des cycles, réduction du temps d'enseignement, avec la suppression progressive de l'école le samedi matin, etc. Les modifications structurelles peuvent avoir des effets didactiques : par exemple moins de temps accordé à certains enseignements, d'où moins de réinvestissement, et maintien du temps d'enseignement pour d'autres.

Brissiaud (2013 et audition pour la conférence nationale) évoque la circulaire de 1986 sur le rétablissement du comptage en maternelle pour expliquer les difficultés actuelles des élèves dans le domaine numérique. Selon moi, les évolutions liées à la numération décimale des entiers depuis 45 ans que je vais évoquer dans ce texte sont de nature à influencer plus directement les résultats des élèves en numération que cette circulaire. Néanmoins, cette assertion est de l'ordre de la conviction.

Quel est le problème ? Comment se manifeste-t-il ?

Les unités de numération et les conversions

Les unités de numération

Pour mettre en évidence et **permettre de penser** ce qui me semble être un problème majeur pour l'enseignement actuel de la numération décimale, j'ai décidé d'appeler *unités de numération*, les mots ou expressions : unités simples (ou unités lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté), dizaines, centaines, milliers, dizaines de milliers, centaines de milliers, millions... Ces unités de numération sont ce qu'on appelait autrefois (c'est-à-dire avant 1970) les unités des différents ordres (ou les différents ordres d'unités).

Ce qui est important mais ne peut peut-être être appréhendé immédiatement est tout d'abord que ces unités de numération sont des *unités*. C'est-à-dire quelque chose qui va pouvoir être compté. Ensuite, une autre chose importante est que ces choses, ces unités de numération, sont du domaine de *l'immatériel* : autrement dit une dizaine n'est pas une organisation matérielle d'une quantité. Pourtant, certaines organisations matérielles favorisent le comptage des dizaines.

Considérons les figures 1 et 2 : les croix et les deux affirmations relatives au nombre de croix.

	XXXXXXXXXX
	XXXXXXXXXX
	XXXXXXXXXX
	XXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXX
	XXXXXXXXXX
	XXXXXXXXXX
	XXXXXXXXXX
	XXXXXXXXXX
a) Il y a douze dizaines de croix.	a) Il y a douze dizaines de croix.
b) Il y a cent-vingt croix.	b) Il y a cent-vingt croix.
Figure 1 :	**Figure 2 :**

Pour chacune de ces deux figures, les deux affirmations sont vraies : a) Il y a douze dizaines de croix. b) Il y a cent-vingt croix. Chacune de ces affirmations indique le nombre de croix qu'il y a dans chaque figure exprimé dans deux unités différentes : en dizaines de croix d'une part, en croix d'autre part. Le fait de passer d'une expression à l'autre, de changer d'unité, s'appelle une conversion.

L'organisation matérielle de la deuxième figure permet de compter plus facilement les dizaines que celle de la première. Néanmoins, il y a le même nombre de dizaines de croix (ou le même nombre de croix) dans les deux figures. En revanche, il y a douze paquets de dix croix seulement dans la deuxième. Il y a une différence entre une dizaine et un paquet de dix. Une dizaine est un nombre, c'est une façon de dire dix : à chaque fois que je compte dix, je compte une dizaine. Si je compte : une dizaine, et encore une dizaine, et encore une dizaine. J'ai compté trois dizaines.

Les huitres sont souvent vendues *à la douzaine* mais pas par paquets de douze. Les croix auraient pu être comptées, comme les huitres, en douzaines, une autre unité. Il y a ainsi dix douzaines de croix dans chaque figure.

Les unités de numération sont organisées en système, ce que dit bien l'expression ancienne : les différents ordres d'unités. Ceci leur confère des propriétés que n'a pas le système réduit *douzaine, unité simple*.

Un système de signes puissant et unificateur

Considérons la tâche : 1) Calculer la longueur suivante : 6 dm 28 cm 32 mm.

L'expression peut être réduite avec la technique suivante qui s'appuie sur des conversions successives – avec des reports en cascade en partant des unités les plus petites - : 6 dm 28 cm 32 mm = 6 dm 28 cm 3 cm 2mm = 6 dm 31 cm 2 mm = 6 dm 3 dm 1 cm 2 mm = 9 dm 1 cm 2 mm. Ces conversions sont possibles grâce au rapport dix existant entre les unités métriques dm et cm, cm et mm. Ce rapport permet d'affirmer par exemple : 10 mm = 1 cm donc, 30 mm = 3 cm.

Considérons maintenant la tâche : 3) « écrire en chiffres : 6+28/10+32/100 ».

La technique précédente se décline de la façon suivante :

6+28/10+32/100 = 6+28/10+30/100+2/100 = 6 + 28/10 + 3/10 + 2/ 100 = 6 + 31/10 + 2/100 = 6+30/10+1/10+2/100 = 6+3+1/10+2/100 = 9+1/10+2/100 = 9,12

Pour finir, considérons la tâche : 2) « écrire en chiffres : (6x100)+(28x10)+32 ».

La « même » technique « se décline » alors comme suit :

(6x100)+(28x10)+32 = (6x100)+(28x10)+(3x10)+2 = (6x100)+(31x10)+2 = (6x100)+(30x10)+(1x10)+2 = (6x100)+(3x100)+(1x10)+2 = (9x100)+(1x10)+2 = 912

Une telle technique n'est guère raisonnable. Une autre technique est alors (6x100)+(28x10)+32 = 600+280+32 en utilisant la « règle » des zéros. Ensuite, une addition posée avec retenue permet de conclure. « Ecrire en chiffres : (6x100)+(28x10)+32 » semble ainsi être une tâche de calcul alors qu'elle pourrait être posée comme une tâche de numération.

Que deviennent les tâches 2 et 3 avec le système des unités de numération ? La deuxième tâche se traduit par : « écrire en chiffres 6 unités 28 dixièmes 32 centièmes ». Il suffit pour cela d'oraliser les expressions fractionnaires.

Dans une unité simple, il y a dixièmes ; et dans un dixième, il y a dix centièmes. Les centièmes peuvent être convertis simplement en dixièmes, et les dixièmes en unités simples. Par suite, la technique des reports permet d'effectuer la tâche. 6 unités 28 dixièmes 32 centièmes = 6 unités 28 dixièmes 3 dixièmes 2 centièmes = 6 unités 31 dixièmes 2 centièmes = 6 unités 3 unités 1 dixième 2 centièmes = 9 unités 1 dixième 2 centièmes = 9,12

Enfin, la troisième tâche se traduit par : « écrire en chiffres : 6 centaines 28 dizaines et 32 unités ». Cette traduction est plus délicate. Il faut interpréter 6x100 comme 6 centaines et 6x10 comme 6 dizaines. La même succession de conversions permet ensuite de réduire l'expression : 6 centaines 28 dizaines 32 unités = 6 centaines 28 dizaines 3 dizaines 2 unités = 6 centaines 31 dizaines 2 unités = 6 centaines 3 centaines 1 dizaine 2 unités = 9 centaines 1 dizaine 2 unités = 912. C'est la même technique que pour les unités métriques et les décimaux puisque le rapport dix existe là encore entre centaines et dizaines, et entre dizaines et unités simples.

Cette unification par le système d'unités de numération (décimales) ne doit pas surprendre. En effet, d'une part le système métrique a été inventé pour rendre élémentaires les conversions lorsque les nombres d'unités sont donnés en base dix, qui est la base usuelle pour l'écriture des nombres. D'autre part, les décimaux ont été inventés pour pouvoir s'écrire dans le même système de signes que les entiers afin que les techniques de calcul posé pour les entiers se prolongent simplement avec les nombres non entiers. Stevin, dans la Disme (1582), appelle d'ailleurs de ses vœux un système d'unités de mesures de grandeurs physiques à base dix lorsqu'il invente les « décimaux », c'est-à-dire l'écriture positionnelle décimale des fractions décimales. Le système métrique ne sera mis au point que deux siècles plus tard, au moment de la révolution française.

Dans un système de signes adapté – celui des unités –, les trois tâches constituent trois manifestations d'un même problème. Dans des systèmes de signes différents, les unités métriques, les écritures fractionnaires, et les écritures multiplicatives, il devient plus difficile d'associer la tâche avec les écritures fractionnaires à la tâche en unités métriques - mais l'oral peut aider -. La tâche avec les écritures n'a quasiment aucune chance d'être associée aux deux autres.

Un siècle d'évolutions de programmes

Je résume brièvement (et brutalement) les évolutions des programmes depuis 90 ans pour la numération des entiers. Entre 1923 et 1970, numération et système métrique marchent ensemble (Chambris 2009). Le système métrique peut être vu comme le « terrain de jeu » de la numération (formule empruntée Brousseau 2002) : le travail de système métrique reprend les tâches de numération, dans le contexte des grandeurs continues. Toutefois, par rapport à l'enseignement préalable de la numération, des tâches sont ajoutées. En effet, dans cet enseignement du système métrique, relativement à certaines unités, des tâches particulières sont présentes, notamment l'estimation et la manipulation des instruments. Ces ajouts sont susceptibles de contribuer simultanément à l'apprentissage des grandeurs et de la numération. En 1970, les bases sont introduites. D'une part, le discret et le continu se séparent. D'autre part, avec les bases, il n'y a plus d'unités décimales, plus de dizaines, centaines…, donc. Ainsi, les unités de numération sont très affaiblies et les instructions mentionnent le mot *groupement* (pour les bases et la base dix) et aussi *unités* (pour la base dix). Plusieurs travaux de la fin des années 1970 et du début des années 1980 (Perret 1985, ERMEL 1978) indiquent l'insuffisance des activités de codages et décodages en base pour apprendre la numération : les élèves interprètent les écritures chiffrées comme des procédures, grouper / dégrouper. Il y a nécessité d'un travail dans un registre symbolique.

Pour les entiers, les savoirs de référence ont été modifiés dans les années 1970 et 1980. Les unités de numération – comme unités -, qui permettaient de formuler tous les savoirs à enseigner dont le savoir de référence, ont été supprimées ou ont disparu… au profit des décompositions multiplicatives et additives –liées au nouveau savoir de référence - qui se généralisent dans les années 1980. Ces dernières constituent un registre symbolique de travail de la numération, en remplacement de celui autrefois constitué par les unités. Une conséquence fondamentale du changement de savoir de référence réside dans l'interprétation de l'écriture chiffrée. Je vais la présenter.

Avant 1970 : après réduction en nombre inférieur à dix pour chaque ordre, c'est la juxtaposition des nombres d'unités de chaque ordre qui constitue l'écriture chiffrée, chaque rang indiquant un ordre d'unités dix fois plus grand que celui placé immédiatement à sa droite. Ceci implique d'indiquer par un signe les unités qui ne sont pas représentées dans la décomposition – c'est le signe 0 qui est choisi. Ceci revient à dire que les unités simples sont au premier rang à droite, les dizaines au 2^e^, les centaines au 3^e^…

Ainsi, si on a une collection constituée par cinq sacs de cent pommes et un sac de dix pommes, pour écrire le nombre de pommes, on compte le nombre d'unités de chaque ordre : 5 centaines de pommes et 1 dizaine de pommes. Puisqu'il y a moins de dix unités de chaque ordre, on peut juxtaposer ces nombres en prenant soin de mettre 0 pour les rangs non représentés, on écrit ainsi un 1 en 2^e^ position, un 5 en 3^e^ position (et un 0 en première position). Ceci donne 510.

A partir des années 1980, on réfère à la théorie savante, et c'est la juxtaposition des coefficients de la décomposition polynomiale d'un entier dans une base qui constitue la justification de l'écriture chiffrée. La théorie des polynômes demande un niveau d'abstraction probablement supérieur à celui requis pour la théorie en unités. D'ailleurs, dans sa transposition pour l'école élémentaire, il n'y a pas de puissances mais des écritures chiffrées. Ainsi, $\sum r_i a^i$ devient $\sum r_i 10^i$, puis

a X 1000 + *b* X 100 + *c* X 10 + *d* ou *a*000 + *b*00 + *c*0 + *d*.

Ainsi, notre problème précédent se résout comme suit : le nombre de pommes est 5x100+10. D'après la théorie, pour obtenir l'écriture chiffrée, il faut faire apparaître les coefficients du polynôme : 5x100+10=5x100+1x10+0x1. Leur juxtaposition donne alors 510. On le voit, les coefficients 1 et 0 sont particulièrement difficiles à faire apparaître.

De mon point de vue, un tel discours pour obtenir une écriture chiffrée n'est pas tenable. Fondamentalement, des connaissances avancées, en algèbre, sont nécessaires pour comprendre ce qui se joue. Ce que laissent penser les évolutions ultérieures du programme est en effet qu'il est probablement trop formel et inaccessible à de jeunes enfants. Et cette complexité induit une succession de modifications qui conduit à des dérives multiples dans l'enseignement de la numération. Quelles sont ces évolutions ? Quelles sont les dérives ?

Le travail sur les écritures en base dix, associé au travail dans les petites bases, permettait peut-être aux élèves d'élaborer certaines significations pour les chiffres d'un nombre. La suppression des bases en 1978-1980 au CE et au CM, puis en 1985 au CP rend probablement cela plus difficile. L'interprétation, voire la transformation, de tâches de numération en tâches de calcul est donc une première dérive.

En 1977-1980, au CE, les instructions indiquent « L'étude de la numération entreprise au C.P. sera reprise et prolongée. Au cours de ce travail, il est nécessaire de dépasser les manipulations du type groupement ou échange qui peuvent devenir un obstacle à des procédures plus rapides et il faut permettre aux enfants de travailler directement sur les écritures ». Un travail important est prescrit au CE et au CM sur les écritures, dans l'esprit de l'exemple (6x100)+(28x10)+32, mais en beaucoup plus « simple » . La seule mention des unités est au CM, dans des questions quasiment rituelles du type : "combien de dizaines, de centaines, dans un nombre donné ?" En 1991 puis 1995, dans les programmes écrits pour la mise en place des cycles, les unités sont mentionnées, seulement au cycle 2, de la façon suivante :

« * être capable de coder une quantité par la mise en œuvre de procédures de groupements ou d'échanges par dizaines et centaines ;

* comprendre la signification des différents chiffres de l'écriture d'un nombre ; par exemple : être capable de faire la différence entre le chiffre des dizaines et le nombre de dizaines ; »

Au cycle 3, la signification de la valeur des chiffres apparaît comme suit :

« - connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre entier et décomposer ce nombre suivant les puissances de dix ; »

Dans les instructions de 2002, les formulations de groupement et d'échanges par dizaines et centaines sont reprises, et étendues au cycle 3. Le nombre de dizaines est associé explicitement au nombre de paquets de dix, probablement parce que le travail est trop formel. La valeur des chiffres en fonction de la position est citée aux cycles 2 et 3. Les programmes de 2008 n'évoquent plus ni les échanges, ni les groupements, ni les dizaines, ni les centaines. Pour les entiers, la valeur des chiffres en fonction de la position est citée, seulement au cycle 3, et seulement dans la partie programme et non dans les progressions.

Ainsi, le travail sur le matériel proposé d'abord initialement au CP est étendu d'abord au CE, puis au CM. Et le travail dans le registre symbolique est de plus en plus réduit, jusqu'à ce que, même la « valeur des chiffres » disparaisse progressivement. En quoi ces éléments constituent-ils des dérives ?

Etude de cas

Je vais illustrer ce qui me semble constituer une conséquence majeure de ces choix institutionnels avec l'exemple d'une situation de classe présentée (vidéo et analyse) dans une ressource pour la formation parue en 2008 (Fénichel & Taveau 2008).

Description rapide de la situation de l'enveloppe des nombres.

Il s'agit de la même enseignante qui est filmée à un ou deux ans d'intervalle. La première fois en CM1 avec les entiers, la seconde en CM2 avec les décimaux.

Les élèves ont une enveloppe dans laquelle se trouvent des étiquettes en papier (beaucoup d'étiquettes : 98 au CM1, 83 au CM2). Sur chaque étiquette est inscrit un nombre. A chaque niveau de classe, les étiquettes se répartissent comme suit.

CM1 (98 étiquettes)	CM2 (83 étiquettes)
32 étiquettes marquées « 1 ».	32 étiquettes marquées« $\frac{1}{1000}$ ».
28 étiquettes marquées « 10 ».	28 étiquettes marquées « $\frac{1}{100}$ ».
19 étiquettes marquées « 100 ».	19 étiquettes marquées « $\frac{1}{10}$ ».
16 étiquettes marquées « 1 000 ».	4 étiquettes marquées « 1 ».
3 étiquettes marquées « 10 000 ».	

La consigne est la même dans les deux cas :

- Je vais vous demander de me dire combien il y a en tout dans l'enveloppe.
- Vous n'avez pas le droit d'utiliser le cahier d'essais ni la calculette ; tout se fait de tête.
- Quand vous aurez terminé de compter, vous écrirez sur votre enveloppe, au crayon à papier, le résultat.

En séance 2, les élèves disposent d'une boite et de quelques étiquettes supplémentaires de chaque sorte pour faire des échanges.

Les procédures spontanées des élèves pour les décimaux, en séance 1

Extrait 1 :

M : est-ce que quelqu'un pourrait dire pourquoi le calcul est apparu difficile / R./

R : parce qu'il fallait convertir

M : il fallait convertir

Extrait 2 :

E : on a compté les millièmes / on a / il y avait trente millièmes /euh / il y avait vingt-sept centièmes /

M : d'accord /

E : il y avait vingt-sept centièmes / j'ai dit à L. que ça faisait / que trente centièmes / enfin trente millièmes c'était égal à trois centièmes /

Extrait 3 :

E : on a regardé si tout pouvait faire des unités alors on a mis de côté / euh ce qui pouvait pas faire des unités / et après on a / avec ce qui nous restait on a regardé si on pouvait / euh rassembler en faisant des unités /

M : peux-tu nous donner un exemple

E : euh quand il nous restait euh/ neuf / on avait neuf dixièmes / et comme on sait que pour / pour faire un dixième / il nous faut / euh dix centièmes

M : vous êtes d'accord /

Es : oui

M : oui

E : alors / on a pu faire ça et ça nous a donné une unité /

Plusieurs élèves trouvent le bon résultat ou des résultats proches (à une unité de numération près, souvent décalée sur un autre chiffre), par ces manipulations langagières sur les unités, accompagnées de manipulations d'étiquettes.

La ressource prévoit qu'en séance 2 les élèves soient dotés d'une boite et d'étiquettes supplémentaires pour leur permettre de faire des échanges, ce qu'ils font.

Une analyse de la situation et des savoirs mathématiques en jeu montre que les stratégies qu'ils mettent en place en séance 1 permettraient, si elles étaient systématisées et organisées, de résoudre le problème en faisant fonctionner :

- Les relations entre unités (qui font l'objet d'un affichage partiel dans la classe)
- La valeur positionnelle d'un chiffre comme représentant une unité d'un certain ordre (qui fait l'objet d'un affichage partiel dans la classe)

Soit 32 millièmes, 28 centièmes, 19 dixièmes, 4 unités à écrire en chiffres. Comme les élèves ne peuvent écrire de résultats intermédiaires, une stratégie pour aboutir consiste à :

- convertir 32 millièmes en 3 centièmes et 2 millièmes : pour cela par exemple décomposer 32 millièmes en 30 millièmes + 2 millièmes, puis convertir **30 millièmes en 3 centièmes**, leur adjoindre 2 millièmes ;
- ajouter **3 centièmes et 28 centièmes**, soit 31 centièmes convertis en 3 dixièmes et 1 centième : pour cela par exemple décomposer 31 centièmes en 30 centièmes +1 centième et convertir 30 centièmes en 3 dixièmes,
- ajouter 3 dixièmes et 19 dixièmes, soit 22 dixièmes qui se décomposent par exemple en 20 dixièmes + 2 dixièmes. 20 dixièmes sont convertis en 2 unités, auxquelles sont ajoutées 2 dixièmes ;
- les 2 unités s'ajoutent à 4 unités, soit 6 unités. Il y a donc 6 unités.
- Le nombre est donc : de droite à gauche, 2 (millièmes), 1 (centième), 2 (dixièmes), 6 (unités) et de gauche à droite : 6,212.

L'extrait 2 correspond visiblement à ce qui est en gras, avec peut-être une erreur de comptage.
L'extrait 3 correspond à une autre stratégie, en partant des grosses unités : on a d'abord 4 unités simples, on cherche à en faire d'autres. Avec 19 dixièmes, on fait une unité simple supplémentaire en convertissant 10 dixièmes en 1 unité. Il reste alors 9 dixièmes, il en manque un pour faire une unité supplémentaire. On l'obtient en convertissant dix centièmes (parmi 28) en 1 dixième. Il reste alors 18 centièmes, et on a 6 unités simples. On peut poursuivre : 10 centièmes vont constituer un dixième et il reste 8 centièmes. Il manque 2 centièmes pour faire un dixième supplémentaire : 20 millièmes vont être convertis en 2 centièmes qui vont s'ajouter à 8 centièmes pour former un dixième. Cela fait donc 2 dixièmes et il reste 12 millièmes qui forment 1 centième et il reste 2 millièmes.

Les élèves ont fait (éventuellement sans le savoir) des conversions, certains savent que ce sont des conversions. A aucun moment, ils ne parlent spontanément d'échanger des centièmes contre des dixièmes. Au début de la mise en commun qui termine la première séance un élève formule le mot *convertir* et le mot se diffuse très rapidement. Il est clair que des élèves font le lien avec ce qu'ils ont appris en système métrique : changer d'unité.

Pourtant ce n'est pas cela qu'il est proposé aux élèves d'approfondir. Dans ce qui leur est proposé en séance 2, le but devient de faire des échanges pour avoir moins étiquettes. Il s'agit d'un cas typique de *glissement métadidactique* (Brousseau 1983, 2004). Le moyen d'enseignement (les échanges) devient un nouvel objet de l'enseignement. Ce n'est pas forcément un problème. Ce qui est problématique dans la situation présente c'est que ce moyen d'enseignement est imposé aux élèves alors qu'il ne leur était pas nécessaire. Il n'y a aucune tentative d'enseigner le savoir lié aux unités et aux conversions, de faire fonctionner les savoirs sur les unités qu'ils ont déjà. Le glissement métadidactique n'est pas une initiative du professeur ou de la ressource mais de l'institution.

Que se passe-t-il avec les entiers ?

Avec les entiers la situation est très différente. En effet, de façon massive, les élèves récitent les diverses comptines numériques qu'ils maîtrisent bien (de un en un, de dix en dix, de cent en cent, de mille en mille, de dix-mille en dix-mille) pour trouver le nombre. Beaucoup d'élèves organisent leurs étiquettes : tous les 1 ensemble, tous les 10 ensemble, etc. mais pas tous les élèves. De toute façon, ce n'est pas vraiment un obstacle puisqu'ils trouvent le nombre en récitant la comptine, ce qui est indépendant de l'ordre dans lequel on énumère les étiquettes. Certains élèves font des groupes d'étiquettes pour faire apparaître les nombres dix-mille (en comptant les étiquettes 1000 : mille, deux mille, … dix-mille ou bien un, deux, trois quatre…, dix), mille (en comptant les étiquettes 100 : cent, deux cents, …ou bien un, deux…), etc. Ceci étant fait, ils utilisent les comptines pour trouver le nombre « oralement » puis l'écrire en chiffres.

Que se passe-t-il en séance 2 ? Les élèves sont contraints de faire des échanges : dix étiquettes 1 contre une étiquette 10, etc. Ils le font. Comment trouvent-ils le nombre ? En récitant les comptines, comme en séance 1, à partir d'un nombre d'étiquettes plus réduit, ou avec d'autres stratégies de calcul mental mais aucun élève n'utilise le nombre d'étiquettes de chaque sorte – après échange – pour donner l'écriture chiffrée. L'enseignante cherche alors une stratégie pour aider les élèves à faire le lien entre nombre d'étiquettes et chiffres.

Elle demande à Nicolas de venir « faire le résultat ». Nicolas dit : quatre dix-mille, ça fait quarante-mille/…/ alors six mille plus deux mille ça fait huit mille / plus huit mille / …/ j'ai fait quarante-huit mille / …/ j'ai fait cent fois deux / ça fait deux cents / …/ après j'ai fait quarante huit mille deux cent / deux cent plus un dix / un fois dix / ça fait euh / ça fait dix / …/ Et après ça fait quarante huit mille euh / deux cent dix /…/ Et après j'ai fait euh / un fois deux / ça fait deux / ça fait quarante huit mille deux cent douze

La maîtresse écrit simultanément une décomposition multiplicative, une autre additive, et le résultat chiffre par chiffre pour accompagner le discours de l'élève et faire apparaître des écritures (4x10 000 + 2x1 000 + 6x1 000+2x100+1x10+2x1, 40 000+8 000+200+10+2, 48 212) mais c'est un calcul oral, reposant sur les noms des nombres, que fait l'élève. C'est l'oral qui lui permet de trouver le nombre. Ainsi, malgré ce calcul, les nombres d'étiquettes ne sont pas des indicateurs des chiffres du nombre : à ce moment-là, Nicolas – comme les autres élèves de la classe - ne fait pas le lien entre le nombre d'étiquettes et l'écriture chiffrée. La maitresse le remarque. Elle cherche un autre moyen. Elle fait compter aux élèves les nombres d'étiquettes de chaque sorte et écrit ces nombres dans les colonnes du tableau de numération. Finalement Nicolas voit un lien : le 4 dans la colonne des dix-mille signifie 40 000 : quatre (dans la colonne des dix-mille) zéro (dans la colonne des mille) zéro (dans la colonne des centaines) zéro (dans la colonne des dizaines) zéro (dans la colonne des unités), soit quarante mille, le 8 dans la colonne des mille signifie 8000, le 2 dans la colonne des centaines signifie 200, etc. Et ensuite, ces différents nombres s'ajoutent en respectant la règle de la position (c'est le principe des étiquettes Montessori). Cette conception -écritures courtes- est d'ailleurs présente dans des manuels scolaires français. (figure 3)

mille (milliers)			unités				
c	d	u	c	d	u		
3	5	7	4	8	9	→	357 489
3	0	0	0	0	0	→	300 000
	5	0	0	0	0	→	50 000
		7	0	0	0	→	7 000
			4	0	0	→	400
				8	0	→	80
					9	→	9

357 489 =

300 000 + 50 000 + 7 000 + 400 + 80 + 9

(3 x 100 000) + (5 x 10 000) + (7 x 1 000) + (4 x 100) + (8 x 10) + (9 x 1)

Figure 3 : Extrait de manuel scolaire du CE2

Toutefois, ce n'est pas la conception visée par la maîtresse et elle ne la comprend visiblement pas.

Ces observations sur l'utilisation massive de la comptine orale par les élèves qui vient se substituer à l'interprétation des chiffres rejoint les observations de Mounier au CP où la comptine est la stratégie utilisée par les enseignants pour obtenir les écritures chiffrées dans les décompositions additives du type 10+10+10+10+3 (écrit) dix, vingt, trente, quarante, quarante-trois (oral) 43 (écrit).

Pourquoi toute cette difficulté avec les entiers ? Quelles conséquences sur les apprentissages de la numération décimale ?

1) Mon analyse est que les techniques de conversion qui émergent avec les décimaux (même si non institutionnalisées par l'enseignante) ne peuvent pas émerger avec les entiers car les élèves ne disposent pas des unités de numération entières. Elles ne sont pas enseignées. Les relations entre unités ne sont pas enseignées. Et, contrairement à ceux des décimaux, les noms des entiers (inférieurs à un million) ne mobilisent pas les noms des unités. La seule fois où la maîtresse parle de dizaines ou de centaines c'est pour désigner les étiquettes disposées dans la colonne du tableau de numération : « va faire les dizaines ». Réciter la comptine de dix en dix (dix vingt trente), ce n'est pas compter des dizaines (une dizaine, deux dizaines, trois dizaines…). L'égalité dix dizaines = une centaine n'a pas d'équivalent en numération orale : le nombre qui suit quatre-vingt-dix quand on compte par dix est cent. Avec les comptines et les noms des nombres, les élèves raisonnent en unités simples, or il est nécessaire de penser en unités de numération pour raisonner sur les chiffres d'un nombre, si on ne maîtrise pas l'algèbre des polynômes. Je reviens ci-après sur l'interprétation en *écritures courtes.*

2) A l'école, à cause de la trop grande complexité de la théorie des polynômes, pour donner une signification aux chiffres on est contraint de référer à du matériel. Les nombres de paquets (de bûchettes par exemple) ou d'étiquettes sont censés être des indicateurs des chiffres du nombre. Pourtant ils ne suffisent pas à constituer le nombre. En effet, c'est ce qu'il y a *dans* le paquet ou *sur* l'étiquette qui doit constituer le nombre. « 2 paquets » ou « 2 étiquettes » ne sont pas un nombre de bûchettes ou un nombre "sans unité". La seule unité possible pour un 2, chiffre d'un nombre, est l'unité de numération qu'il représente : par exemple la centaine. Il y a 2 centaines (de bûchettes dans le paquet). C'est justement le concept qui n'est pas enseigné depuis 1970.

Il existe néanmoins une autre interprétation élémentaire pour ce 2. Ce 2 peut être *suivi de zéros*. Le chiffre 2 représente alors : **2**x100 (bûchettes), soit **2**00 (bûchettes). C'est ce qu'explique Nicolas au tableau. Finalement, la signification des « écritures courtes » -2 dans la colonne des centaines, c'est 2 suivi de deux zéros (principe des étiquettes Montessori)- est un moyen de donner un poids aux chiffres et de leur donner une signification, sans disposer du concept d'unité de numération, on retrouve avec cette signification une unité qui est l'unité simple, ici la bûchette (Thanheiser 2009 parle de « group of ones »). Ce n'est donc pas la signification chiffre par chiffre en unités de numération qui se construit mais une autre en somme d'unités simples avec des zéros, de plus en plus nombreux.

3) Dans le meilleur des cas, les élèves semblent pouvoir construire seulement cette signification des écritures courtes. Qu'en penser ? Tout d'abord, comme elle n'est pas enseignée explicitement, elle risque de ne pas être enseignée du tout. C'est un apprentissage incident. En outre, même si elle est correcte elle est moins puissante que celle des unités : si on connaît la signification en unités simples on peut construire l'autre mais la réciproque est généralement fausse. Enfin, se pose le problème de l'articulation avec les décimaux.

Conséquences et conclusion provisoire

Articulation entiers décimaux

En effet, venons-en aux nombres décimaux. L'apprentissage des décimaux vient après celui des entiers et les élèves sont censés prolonger leur connaissance de l'écriture chiffrée. Qu'en est-il ? Tout d'abord, les désignations orales des fractions décimales utilisent les unités de numération (3/10 se dit trois dixièmes ; 10 /10 se dit dix dixièmes). Par suite, les unités de numération sont susceptibles de circuler un peu, à l'oral, dans les classes de CM, si les fractions sont lues comme des fractions c'est-à-dire trois dixièmes et non trois sur dix. Le lien entre fractions, unités et écriture décimale peut être facilité, voire se faire si les écritures à virgule sont lues avec les unités et non en juxtaposant deux entiers, c'est-à-dire trente-sept (unités) et soixante-deux centièmes et non trente-sept virgule soixante-deux. C'est une raison qui justifie à elle seule d'enseigner et d'utiliser la lecture des nombres décimaux sous la première forme.

Les ingénieries développées depuis 30 ans pour l'enseignement des décimaux – bien que pas toujours bien enseignées – reposent toutes sur les unités de numération (dixièmes, centièmes, millièmes…) et des conversions même si ces mots ne sont pas souvent écrits : les unités interviennent *à l'oral* quand on *dit* les fractions et les conversions dans les équivalences du type 30/100=3/10. Toutefois, actuellement, à ma connaissance, elles ne sont pas présentes à l'écrit dans ces ingénieries. De plus, on voit bien que si les élèves n'ont jamais appris les unités de numération pour les entiers, l'apprentissage des décimaux va leur apparaître doublement nouveau et difficile : il y a à la fois de nouveaux nombres – non entiers - et une nouvelle signification de l'écriture décimale.

Ainsi, il se pourrait que dans le meilleur des cas, dans un nombre décimal, il y ait une partie entière avec ses règles de fonctionnement et une partie décimale avec ses règles de fonctionnement, différentes. Ce dont ni élèves ni enseignants ne sont au courant. Il se pourrait aussi que la numération des entiers soit plus ou moins souvent comprise comme une longue liste de mot dont on peut se souvenir avec les comptines par un, dix, cent, mille… mots qu'on peut écrire avec des chiffres et comparer en appliquant quelques règles sur la longueur de ces écritures.

Il est probable que l'enseignante de la classe filmée dans la ressource dispense un enseignement de grande qualité et que les compétences de ses élèves ne se retrouvent pas dans toutes les classes de CM2. Il est visible qu'on a enseigné aux élèves de cette classe toutes les relations entre les unités fractionnaires : unité simple, dixième et centième. Ce ne sont pas des apprentissages incidents. L'observation des affichages de la classe de CM1, sur les entiers, avec la même enseignante, ne montre rien de tel. Avec les entiers, les unités de numération (jusqu'au millier inclus) ne sont pas utilisées dans les désignations orales ordinaires des nombres. Les stratégies de conversion ne peuvent apparaître si les unités et les relations entre elles ne sont pas apprises. Il y a nécessité d'une introduction VOLONTARISTE des unités de numération pour qu'elles vivent dans l'enseignement et pour qu'elles soient ainsi prolongées dans les décimaux.

Il n'est pas si facile de dire quelle est la cause des difficultés actuelles des élèves identifiées, par exemple, dans l'enquête récente de la DEPP à l'entrée CE2. J'ai indiqué d'assez nombreux dysfonctionnements accumulés depuis 45 ans dans l'enseignement de la numération des entiers. Mon travail ne permet pas de dire si ce sont elles qui sont à l'origine des difficultés des élèves. D'autres études montrent que certaines tâches – notamment de conversions – ne sont pas réussies (Tempier 2013). Cela est plus facile à relier aux dysfonctionnements que je viens d'évoquer car les conversions en unités entières ne sont pas enseignées. Dans Chambris (soumis), je montre que des tâches de dénombrement de dizaines et centaines (cf. Exercice 6, plus loin dans ce texte) sont peu réussies. Les différents types de difficultés sont-ils liés ?

Même si les pratiques des enseignants sont complexes et ne dépendent pas que de la structuration des savoirs à enseigner. On ne peut exclure qu'un dysfonctionnement important et ancien dans l'organisation des savoirs à enseigner puisse contribuer à expliquer des phénomènes récurrents dans les pratiques ordinaires des enseignants, notamment ceux dans lesquels les enseignants semblent ne pas parvenir à se saisir de ce qu'il y a à enseigner en numération (Numa-Bocage, et al. 2007 ; Ricco, Menotti, 2007 ; Allard 2010 ; Mounier Op.cité).

D'autres enquêtes (thèse récente de Chesné 2014) soulignent la baisse importante des résultats des élèves avec le calcul sur les décimaux entre 1987 et 2008 et une stabilité relative avec le calcul sur les entiers à l'entrée en 6^{e}. On peut presque affirmer qu'avec l'enseignement actuel de la numération des entiers tel que je l'ai évoqué, celui des décimaux apparaît comme quelque chose de radicalement nouveau. La numération positionnelle des décimaux n'apparaît pas comme la poursuite de l'enseignement de la numération positionnelle des entiers.

Il importe donc de développer, avant l'apprentissage des décimaux, une connaissance de la numération positionnelle des entiers qui pourra être prolongée dans la numération positionnelle des décimaux. A l'école primaire, les unités de numération des entiers sont indispensables pour cela. Le fait que les écritures fractionnaires se disent en unités rend assez facile l'insertion d'unités dans des ingénieries anciennes mais pour le moment elles sont à l'oral.

Ce ne sont pas les échanges qu'il faut enseigner aux élèves, ce sont les conversions entre unités de numération.

Selon moi, les procédures que les élèves emploient pour les décimaux montrent la voie. Ils ne cherchent pas à faire des échanges mais à réduire les nombres d'unités de chaque ordre en convertissant en unités les plus grosses possibles. En outre, ces stratégies spontanées sont de deux types : 1) en partant des plus petites unités, 2) en essayant de fabriquer des unités entières et donc en commençant par les unités les plus grosses. Ces procédures sont conformes à ce qu'indique une analyse d'ordre mathématique.

Il est remarquable en effet que les deux stratégies apparaissent spontanément dans les procédures des élèves. En convertissant à partir des plus petites unités, ceci permet d'obtenir en premier le nombre d'unités qui ne peuvent être converties en unités plus grosses, le chiffre le plus à droite dans le nombre. En commençant par chercher à faire les unités les plus grosses, on obtient d'abord l'ordre de grandeur du nombre, et le plus souvent le chiffre le plus à gauche en premier (même si, théoriquement, avec cet algorithme aucun chiffre n'est stabilisé avant la fin du processus). Dans une activité de dénombrement de grande collection dans laquelle on ferait des paquets, le premier algorithme correspond aussi (dans la numération des entiers) au fait de faire tous les paquets de dix d'abord, les objets non groupés indiquent alors le chiffre de la plus petite unité. Le deuxième algorithme correspond au fait de chercher à faire les plus gros groupements possibles, dès le départ. Ces deux algorithmes se retrouvent aussi au niveau des savoirs de référence, puisque le premier correspond à l'algorithme utilisé habituellement pour obtenir les chiffres dans la théorie de la décomposition polynomiale actuellement transposée (associé à l'existence et l'unicité de la division euclidienne), le second était l'algorithme formulé dans la théorie utilisée antérieurement à la réforme pour obtenir l'écriture chiffrée (associé à la construction itérative des unités, Bezout & Reynaud 1821, Notes de Reynaud - §2).

Ces deux algorithmes sont donc au cœur des techniques à enseigner en numération décimale.

Quelles évolutions semblent souhaitables dans le curriculum ?

A ce jour je ne suis pas en mesure de décliner ce qui pourrait correspondre à un programme d'enseignement sur la numération décimale, même si je peux avoir des idées sur les problèmes qui risquent de se poser, sur ce qu'on pourrait faire avec les élèves et à quel moment. C'est plutôt l'objet de cette seconde partie du texte.

Pour penser des évolutions du curriculum, de mon point de vue, il y a nécessité d'agir au niveau des savoirs de référence et il y a nécessité de concevoir et intégrer de nouvelles tâches. Je crois que disposer d'un texte de référence qui comporterait des savoirs mathématiques du second ordre et un catalogue de tâches serait déjà d'un grand secours. Un tel texte, relatif aux entiers, aux décimaux et aux fractions, pourrait constituer une référence partagée pour l'école et le début du collège et favoriser la continuité du curriculum.

Un enjeu est le rétablissement des unités de numération dans l'enseignement de la numération décimale des entiers. Un point important est de penser l'articulation avec les pratiques actuelles et notamment l'insertion d'unités de numération dans ces pratiques, et donc aussi, l'articulation entre unités simples – c’est-à-dire aussi les nombres qu’on écrit sans unité – et unités complexes : 4 centaines = 400 u = 400 et aussi 4 centaines = 40 dizaines. En effet, il ne faudrait pas que l’enseignement de la numération se réduise à celui d’une suite de conversions.

Introduire les unités de numération : oui mais comment ?

Réintroduire les unités de numération

Pour des raisons pas encore bien identifiées, les enseignants « ordinaires » ne voient pas l’intérêt de travailler les unités de numération, ils « résistent » à l’utilisation des unités de numération, alors même qu’ils sont engagés dans des formations (voire des recherches actions) dont le but annoncé est celui de l’intégration de ces unités dans leurs pratiques. Plusieurs explications peuvent être avancées.

Dans la mesure où tout changement de pratique est couteux, il faut de bonne raisons pour changer. Or, ces nouveaux discours sont contraires à ce qu’on leur dit depuis 35 ans, voire à ce qu’on leur a appris à l’école. Notamment, il peut exister une sorte d’« idéologie » du matériel chez certains enseignants (héritée de la réforme, puis retravaillée dans la contre-réforme). Ils peuvent ne pas percevoir la possibilité de créer la numération avec les unités, auquel cas, celles-ci n’apparaissent que comme quelque chose à faire en plus, non relié au reste. Peut-être les enseignants ne voient-ils pas ce que ça pourrait changer d’introduire les unités. Ce n’est d’ailleurs pas si simple de les introduire car il faut les utiliser à des endroits spécifiques. Peut-être que les enseignants ne voient pas les liens qu’elles permettraient de faire avec les décimaux, deux ans plus tard au maximum. Ce dernier point plaide pour une culture commune pour les enseignants des 1er et 2nd degrés et des savoirs mathématiques de référence du second ordre, partagés, afin que tous puissent envisager une continuité du curriculum.

Ensuite, ils peuvent ne pas bien repérer les difficultés de leurs élèves en numération. En effet, la comptine est un leurre absolu et d’une efficacité redoutable. Il en va de même de l’utilisation ordinaire du tableau de numération.

Mixer écritures en unités simples et en unités de numération

De mon point de vue, l’enjeu est l’introduction des unités de numération, à côté des écritures en unités simples (10, 100, 1000, etc.). Les deux registres d’écritures doivent s’enrichir.

Il importe de mixer les différents registres d’écritures, de proposer aux élèves de travailler avec ces registres simultanément : 100 et 1 centaine (et pour faire le lien : 100 unités), le but étant que les élèves voient une centaine dans 100 et 100 dans une centaine sans se poser la question des registres.

Si des techniques en unités simples ont déjà été élaborées, elles peuvent être revisitées, avec des nombres plus grands ou les décimaux. En effet, elles peuvent être comparées aux techniques en unités de numération. Par exemple, pour l’ordre : quel est le plus grand nombre 4 milliers ou 500 ? Mixer les deux registres d’écriture oblige à passer de l’un à l’autre. Cela revient à comparer 4 milliers et 5 centaines. Attendre le moment de l’étude des décimaux pour enseigner les règles de comparaison avec les unités est tardif. Il me semble important de le commencer bien avant, au moment où les élèves apprennent les entiers, peut-être pas dès le CP (c’est à voir), mais sans doute à partir du CE1. Ce point me semble crucial pour le calcul.

Exemple avec la multiplication (et la division) par dix

Par exemple : actuellement, au CM, il est probable que la plupart des élèves disent que pour multiplier par cent on ajoute (ou écrit) deux zéros à droite. On sait que cette technique ne fonctionne plus avec les décimaux mais que de nombreux élèves l'utilisent. Au CM1, lors des consolidations des entiers, un travail sur les unités de numération des entiers peut être fait. Ensuite, lors de l'apprentissage des décimaux, il peut être établi que lors des multiplications par dix, chaque unité de numération est multipliée par dix et donc se déplace d'un rang vers la gauche. Cette nouvelle règle peut être comparée à l'ancienne règle de multiplication des entiers, et éventuellement substituée à elle : elle est valable pour les entiers et les décimaux.

Au cycle 2, la règle des zéros peut être formulée (si besoin), après une observation de l'effet des multiplications par dix sur les unités de numération.

Les divisions exactes et entières des nombres *ronds* par les puissances de dix doivent être enseignées en même temps que les multiplications correspondantes : une unité divisée par dix devient dix fois plus petite, elle est décalée d'un rang vers la droite. 300 : 10 = 30 car les centaines deviennent des dizaines quand on divise par dix. Ou encore, diviser par dix, c'est compter des dizaines.

Exemple d'adaptation de la situation de l'enveloppe des nombres

La situation de l'enveloppe des nombres a visiblement un « bon » potentiel pour l'apprentissage des conversions mais elle doit être adaptée pour cela. Pour les entiers, le remplacement de quelques étiquettes (mais pas de toutes) en écriture chiffrée par des étiquettes en unités est de nature à faire pénétrer les unités dans la situation : « 10 » par « une dizaine », « 100 » par « une centaine », 1000 par « un millier », 10 000 par « une dizaine de millier ». Pour les décimaux, des étiquettes « 1/10 » doivent être remplacées par des étiquettes « un dixième », etc.

Par ailleurs, plutôt que donner une boîte pour faire des échanges il me semblerait pertinent de donner des trombones pour que les élèves puissent organiser la collection d'étiquettes, et ce dès de le but de l'activité, dont la première partie pourrait se terminer sur le rappel ou l'énoncé des relations entre unités. Quant à savoir s'il faut proposer des étiquettes supplémentaires pour faire des échanges, la question me semble ouverte.

Un prolongement de cette situation est un travail de conversion sur les unités, sans matériel. Par exemple : Ecrire en chiffres : 5 dizaines de milliers 23 milliers 86 centaines 12 dizaines. Combien y a-t-il de milliers dans 235 centaines ? Et encore plus simplement, mais avec les millions : combien y a-t-il de centaines de milliers : 1) dans 2 500 000 (à l'écrit), 2) dans deux millions cinq cent mille (à l'oral).

L'enveloppe des nombres peut être utilisée dès le CE1, avec des étiquettes comportant pour certaines des écritures chiffrées, pour d'autres des unités de numération, mais dans le domaine numérique étudié par les élèves (étiquettes : 1, 10, 100, une dizaine, une centaine).

La numération des grands nombres

Actuellement les tâches relatives aux grands nombres dans les programmes sont très pauvres. Pourtant, cet enseignement ne peut se limiter à la lecture / écriture des nombres et à l'ordre. *A minima*, les élèves doivent savoir : un million = mille milliers ; un milliard = mille millions.

Il est important que l'enseignant sache que l'oral est à base mille : chaque unité est mille fois plus grosse que la précédente (unité simple, millier, million, milliard…). Pour les noms des nombres, en commençant par la plus grosse unité, on dit le nombre d'unités de chaque ordre suivi du nom de l'unité sauf pour l'unité simple qui reste implicite. Il y a une exception double : on dit mille pour millier et on ne dit pas le « un » de un mille. L'écrit est à base dix : chaque rang indique une unité qui est dix fois plus grosse que celle qui est à sa droite. Le regroupement par tranches de trois chiffres – de droite à gauche- à partir d'une écriture positionnelle en base dix met en évidence la décomposition en base mille. En sens inverse, en partant d'une décomposition en unités vers l'écriture chiffrée, chaque nombre d'unités –sauf pour la plus grande unité- s'écrit avec trois chiffres, les chiffres les plus à gauches étant des zéros s'il y a moins de cent unités. Ainsi, 13 milliards 1 millier 27 unités se dit « treize milliards mille vingt-sept » et s'écrit « 13 000 001 027 ».

Les conversions évoquées à propos de l'enveloppe des nombres sont nécessaires dans l'apprentissage de la numération des grands nombres.

Les différentes tâches de numération

Au cours des 45 dernières années, les tâches enseignées en numération ont été largement modifiées. Ce qui existait avant n'était pas nécessairement satisfaisant. Avec la disparition des unités de numération ont disparu les conversions. Sont en revanche apparues des tâches de dénombrement de grandes collections. Diverses analyses permettent d'identifier des grandes familles de tâches et des savoirs qui semblent nécessaires pour l'apprentissage de la numération. Actuellement, seule une partie de ces tâches est enseignée. Je donne une liste et j'ajoute des éléments sur les savoirs.

Ces tâches sont directement liées à la numération décimale mais la connaissance des nombres entiers passe fondamentalement par la structuration arithmétique des relations entre ces nombres, à savoir les relations additives et multiplicatives qui les lient. Les décompositions en unités de numération, regardées d'un point de vue additif et multiplicatif, permettent d'envisager les relations aux nombres dix, cent… 307, c'est 3 centaines et 7 unités, c'est 7 de plus que 3 fois cent, c'est (3x100) + 7. Ceci doit aussi être enseigné aux élèves. D'autres relations sont à connaître ou à explorer, notamment celles liées aux nombres 2 (notamment, double, moitié), 5, 25, 60 etc.

Comprendre ce qu'est une unité

Je crois que l'enseignement d'aujourd'hui a oublié comment on enseigne ce qu'est une unité.

Les noms des unités dans la langue courante

Dans la langue courante, les expressions « une dizaine » ou « une centaine » désignent parfois une quantité approximative qui n'a pas à être nombrée. Ceci peut constituer un malentendu originel entre enseignants et élèves.

Une dizaine : une autre façon de dire dix avant de savoir que c'est une unité

La langue française comporte, à côté des adjectifs cardinaux (deux) et ordinaux (deuxième), des noms numéraux. La plupart d'entre eux sont vieillis mais pas tous : la sixaine, la septaine, la dizaine, la douzaine, la vingtaine, la cinquantaine… Ils comportent tous une double signification : exacte et approchée.[1]

Avant de structurer tout apprentissage autour de la dizaine comme unité, sans doute le professeur peut-il simplement utiliser le mot dizaine pour parler de dix. Ainsi, il peut à diverses reprises dire qu' « il y a dix enfants, on peut dire une dizaine d'enfants », « dix jetons, on peut dire une dizaine de jetons ». Il peut demander à un enfant d'amener une dizaine de feuille, en précisant d'abord, « oui, c'est dix feuilles. » Ensuite, les élèves devraient ne plus avoir besoin que le professeur précise. Il peut faire de même avec la douzaine : il y a douze stylos, on peut dire que c'est une douzaine de stylos, voire avec d'autres noms numéraux (vingtaine). Ceux qui sont vieillis sont sans doute plus difficiles à utiliser.

L'explicitation des significations de ces mots devrait permettre d'accéder plus facilement à la signification des unités de nombre, peut-être faut-il préciser surtout en relation avec les significations courantes que le sens peut être exact ou approché. C'est seulement dans un second temps, quand on aura une dizaine de jetons, et encore une dizaine de jetons, et encore une dizaine de jetons, lorsqu'on comptera ces dizaines de jetons qu'on en fera des unités, d'abord pour les collections de jetons puis pour les nombres.

Conversions élémentaires : plusieurs unités pour une même grandeur

Il y a probablement une difficulté conceptuelle dans l'appréhension de ce qu'est une conversion ou de ce que sont deux unités d'une même grandeur. Les conversions dans des unités de grandeurs continues et dans des contextes très familiers, notamment des semaines en jours -3 semaines = 21 jours-, peuvent être utiles avec des jeunes enfants, ça peut se faire sur les doigts dès qu'on sait qu'il y a 7 jours dans une semaine.

Vu que ce sont des unités de nombre, dans un premier temps, les mots dizaines et centaines doivent être utilisés en référence à des objets, dont les types peuvent varier : une dizaine de bûchettes, une dizaine de cubes…

Mesurage et dénombrement

Les tâches de dénombrement en unités simples sont courantes dans l'enseignement ordinaire. Les tâches de dénombrement en unités complexes sont rarissimes. Je pense que ce sont des tâches essentielles pour comprendre ce que sont ces unités.

[1] D'autres noms numéraux pourraient être introduits à d'autres occasions : avec la division (des grandeurs ou des nombres) par un entier, les noms numéraux partitifs, tiers, quarts, cinquième ; avec la multiplication (des grandeurs ou des nombres) par un entier, les noms numéraux multiplicatifs, double, triple, quadruple…

Exercice 6.

★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★
★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★
★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★
★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★
★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★
★★★★ ★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★
★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★
★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★
★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★
★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★ ★★★★★★★★★★

Combien y a-t-il de dizaines d'étoiles ? ....

Combien y a-t-il de centaines d'étoiles ? ....

Combien y a-t-il d'étoiles ? ....

La tâche inverse (constitution de collections à partir du nombre donné en unités diverses) est également nécessaire (entoure 23 dizaines d'étoiles, par exemple). Avec les grandeurs continues, et un mètre gradué, on peut mesurer 4 centaines de centimètres et 57 cm soit 457 centimètres.

Trois systèmes de signes en relation

Les écritures chiffrées, les noms des nombres et les unités de numération constituent trois systèmes de signes qui doivent être mis en relation.

Relations entre noms des nombres et noms des unités

A un moment, peut-être pas au CP mais probablement dès le CE1, je crois nécessaire de relier noms des nombres et noms des unités. C'est utile pour comprendre la signification de la numération orale. Il est possible de décliner un ensemble de règles et d'exceptions. Ces correspondances ont disparu de l'enseignement dans les années 80.

Ci-après, quelques exemples : 5 centaines se dit cinq cents. Cent c'est 1 centaine mais on ne dit pas « un » dans « cent ». Les noms des dizaines sont tous irréguliers, par exemple 5 dizaines se dit cinquante, 3 dizaines se dit trente ; 5 centaines 3 dizaines se dit : cinq cent trente.

Relations entre unités et écriture chiffrée (par la position)

Le discours basique met en relation nombre d'unités et écriture chiffrée : 5 centaines 3 dizaines s'écrit avec 3 en 2^{e} position et 5 en 3^{e}, à partir de la droite, soit 530. Les décompositions additives et multiplicatives peuvent aussi être interprétées avec ce discours : 500+30 c'est 5 centaines et 3 dizaines, ça s'écrit 530. Il en va de même de certains types de problèmes élémentaires de numération : j'ai 5 sacs de cent pommes et 3 sacs de dix pommes, combien cela fait-il de pommes. Il y a : 5 centaines et 3 dizaines, soit 530.

Relations entre code chiffré et numération orale

Les unités de numération constituent un intermédiaire puissant entre les codes écrit et oral :

- 530 → 5 c / 3d → cinq cents / trente → cinq cent trente
- et inversement cinq cent trente → cinq cents / trente → 5 c / 3d → 530

Je souligne que c'est sensiblement la même technique qui fonctionne dans les deux sens.

Les conversions

Les conversions ont à peu près complètement disparu de l'enseignement actuel de la numération.[2] Les progressions qui existent éventuellement pour l'étude des conversions en système métrique peuvent aider à en concevoir pour l'étude de la numération. Il y a cependant une grande diversité de conversions et les différents types ne jouent pas tous le même rôle dans l'apprentissage de la numération décimale. Le but de cette section est de mettre un peu d'ordre dans toute cette diversité.

Du tableau

Concernant les techniques pour traiter les conversions entre unités, le tableau de numération est un merveilleux outil dont il conviendrait de reprendre les usages… (voir la contribution de MJ Perrin pour une analyse de son fonctionnement et des propositions). Le tableau de numération est un « merveilleux » outil de malentendu cognitif au sens des sociologues : on croit que « les élèves ont compris ». Ceci n'implique pas qu'il faille s'en passer mais d'autres techniques doivent être mises en place, en particulier pour les conversions élémentaires.

Le tableau de numération est utile pour se souvenir de l'ordre des unités. Il est utile pour les conversions quand les unités sont éloignées. Néanmoins, il peut aussi être mémorisé et l'élève peut et doit à terme apprendre à voir dans les différents chiffres du nombre les unités qui sont représentées. Dans des cas très simples, par exemple, 2 centaines ou 3 centaines à convertir en dizaines, 124 unités à convertir en dizaines et unités, la conversion devrait être faite sans tableau. A l'inverse, une exploration des différentes expressions possibles d'un nombre donné ou du cardinal d'une collection peut justifier qu'on utilise le tableau : 45 dizaines à exprimer en centaines et dizaines

centaines	dizaines	unités
	45	
4	5	
3	15	
2	25	
1	35	
1	34	10
…		

L'exploration peut être poursuivie en élargissant les possibilités d'expression aux unités simples.

---

[2] Quelques manuels en ont introduit depuis quelques années. En général, le mot convertir n'est pas utilisé et il n'y a pas le signe égal entre les expressions en unités mais « s'échangent contre ».

Un exemple générique de problème

C'est à travers la résolution de problèmes qui incluent des conversions, notamment rattachées à des contextes matériels, que les élèves comprendront les unités. Par exemple, les jeux de commande qui comportent des contraintes peuvent être utiles : Paul a besoin de trombones. Il veut commander 40 dizaines de trombones. Les trombones sont vendus par paquets de cent. Combien doit-il commander de paquets ? Traiter la tâche « convertir 40 dizaines en centaines » permet de conclure. La modification des contraintes, par exemple des trombones vendus par paquets de dix ou cent, et la demande de plusieurs possibilités de satisfaire la commande est une raison d'explorer la situation comme dans le paragraphe précédent.

Dans les lignes qui suivent les exemples sont presque toujours formulés de façon décontextualisée. Il serait important de proposer à la fois des tâches en contexte et des tâches sans contexte aux élèves.

Quelques repères relatifs à la fonctionnalité des conversions, avec quelques implications sur leur programmation

La connaissance des relations entre unités consécutives (rapport dix) est prioritaire sur celle des relations entre unités plus éloignées (rapport cent, mille…). En particulier, ces relations sont utiles pour justifier les retenues dans les techniques opératoires de l'addition, soustraction et multiplication. Elles sont aussi utiles dans l'algorithme de division par le partage des unités successives. La taille des nombres manipulés à l'école fait qu'en général les conversions rencontrées dans les calculs ne font en général intervenir que deux unités consécutives.

Un exemple type de ces conversions est : convertir 32 centaines en milliers et centaines. (Réponse : 3 milliers 2 centaines). Peut-être une autre formulation « type » serait-elle à trouver.

Pour l'apprentissage des grands nombres, toutes les relations entre unités, dizaines, centaines et milliers sont utiles car un million = mille millier et un milliard = mille millions. La tâche « Combien y a-t-il de centaines de mille dans deux millions cinq cent mille ? » permet de mettre en relation milliers et millions.

Les relations entre unités plus éloignées sont utiles pour comprendre le principe du décalage dans les multiplications. Elles sont aussi utiles dans plusieurs progressions actuelles pour l'étude des décimaux quand on écrit : 415,23=41523 centièmes. Quand les nombres sont « long », avec beaucoup de chiffres non nuls, elles visent à l'apprentissage du fonctionnement généralisé du code écrit. Plus basiquement, les multiplications par dix, cent… peuvent solliciter assez vite des unités éloignées dans les justifications.

Nombres ronds et conversions élémentaires

Les nombres avec un seul chiffre non nul, les nombres « ronds » jouent un rôle particulier dans l'apprentissage des relations entre unités car ils ne sollicitent que deux ordres d'unités simultanément. C'est le cas par exemple de « combien y a-t-il de dizaines dans 3 milliers ? ». Ces conversions élémentaires sont ensuite impliquées implicitement de façon récurrente dans toutes les propriétés en relation avec la technique de la troncature. Lorsque les unités ne sont pas trop éloignées, et qu'elles sont courantes, ces conversions peuvent être travaillées avec les nombres écrits ou dits. Elles peuvent être effectuées mentalement.

Quand les nombres sont *compliqués*, ce travail s'effectue plutôt sur le code écrit positionnel. On vise alors un apprentissage de l'écriture chiffrée (ses significations et ses propriétés).

Conversions complexes

Il existe une grande diversité de conversions complexes. Toutes n'ont pas la même importance. J'en indiquerai deux types. C'est toujours le code écrit qui est en jeu. Et c'est l'apprentissage de son fonctionnement généralisé qui est visé.

Les tâches du type « Combien y a –t-il de dizaines dans 4567, mais aussi, convertir 4560 dizaines en milliers » constituent un premier type de conversion. Elles peuvent être résolues par la technique de la troncature. Attention, il ne faut pas enseigner trop vite cette technique. Il est nécessaire que le problème puisse se poser assez longtemps avant qu'on ait une solution toute faite parce que le but n'est pas d'avoir la réponse mais d'apprendre la numération. Un raisonnement chiffre par chiffre pourra être utilisé assez longtemps (puisqu'il mobilise déjà les conversions entre unités) : dans 4567, il y a 6 dizaines, 5 centaines, 4 milliers. Les 5 centaines font 50 dizaines, les 4 milliers font 400 dizaines. En tout, il y a 456 dizaines.

De ce point de vue, la longueur des nombres en jeu est une variable importante. Autant, il est acceptable et souhaitable pour l'apprentissage de faire le raisonnement sur deux ou trois chiffres non nuls, autant quand les nombres seront longs, il faudra une technique « automatisée ».

La sixième pourrait être l'occasion d'introduire l'écriture exponentielle des puissances de dix qui est nouveau moyen de renforcer la connaissance du code écrit. Les unités ont une traduction « immédiate » avec ces puissances de dix.

Les tâches rencontrées dans l'enveloppe des nombres constituent un deuxième type de conversions complexes pour lesquelles la technique avec des reports en cascade déjà présentée pourrait être enseignée. Ecrire en chiffres : 6 unités 19 dixièmes 28 centièmes 32 millièmes. Ces conversions se rencontrent dans l'étude du système métrique. Elles apparaissent dans la justification de la technique opératoire de l'addition posée.

Suites écrites et orales

Les suites écrites et orales de un en un, dix en dix, cent en cent…, en montant et en descendant doivent être construites ou reconstruites à partir du nom des unités de numération et de leurs correspondances avec les noms des nombres. L'appui sur les unités de numération permet notamment d'expliquer et de justifier les « sauts » : de dix en dix, quatre-vingt-dix (9 dizaines), cent (1 centaine), en lien avec 9 dizaines, dix dizaines (ou une centaine) ;

Ordre

Comparer deux collections exprimées dans deux systèmes de signes différents est probablement un puissant levier pour enseigner les correspondances entre les deux systèmes de signes. C'est une source inépuisable de problèmes.

Par exemple, comparer 4 milliers et 500 suppose d'utiliser le même système de signes. Avec les unités, le problème revient à comparer 4 milliers et 5 centaines.

Hamid a 4 centaines de timbres. Jacques a 80 carnets de dix timbres. Qui a le plus de timbres ? On peut comparer 40 (dizaines) et 80 (dizaines).

Les décimaux

Les éléments sur les décimaux mériteraient d'être davantage développés. Pour les décimaux, en gros on a la même chose qu'avec les entiers, mais avec un système d'unités fractionnaires : les unités simples, dixièmes, centièmes... Cependant, il y a un code supplémentaire à introduire et à étudier avec l'étude des fractions qui aura précédé : le code de l'écriture fractionnaire. Le travail avec les formulations en dixièmes et centièmes doit être introduit au moment de l'étude des fractions, voire juste avant.

Pour la numération décimale des décimaux, il y a aussi une simplification par rapport à celle des entiers : la numération orale des décimaux utilise les unités de numération (pour la partie décimale). Le dénombrement de collections discrètes n'a en principe plus de raisons d'être. Il est « remplacé » par la mesure (présente aussi pour les entiers).

Pour les décimaux, il est nécessaire de travailler les relations du même type qu'avec les entiers pour comprendre ce que sont les dixièmes et les centièmes. Il est indispensable d'enseigner les relations entre unités : 10 dixièmes = 1 unité ; 100 centièmes = 1 unité ; 10 centièmes = 1 dixième. Cet enseignement passe par l'effectuation de conversions dans différents registres : 3 dixièmes = ……. centièmes, 3/10 = …/100.

Quelques éléments sur le calcul

Techniques de calcul et conversion

Qu'il s'agisse de nombres entiers ou de nombres décimaux, le recours aux unités de numération, en particulier les conversions, permet de justifier simplement un grand nombre de techniques de calcul. J'ai déjà évoqué la multiplication et la division par dix, cent... Les conversions permettent aussi de justifier toutes les retenues dans les techniques de calcul posées.

Conversions, multiplication, division

Certains types de changements d'unités, autrement dit certaines conversions, doivent être rattachés progressivement, mais dès le CE1, aux multiplications et divisions par dix, cent... Il s'agit des conversions les plus élémentaires : compter 30 dizaines en unités simples revient aussi à calculer 30x10 et calculer 300 : 10 ou encore chercher combien il y a de fois dix dans 300 revient à convertir 300 en dizaines ou à chercher combien il y a de dizaines dans 300.

Avec les programmes actuels, il est impossible de mettre en relation propriétés de la numération et division. Les divisions par dix, cent, mille sont actuellement programmées au CM2. C'est au CE1 qu'elles devraient l'être.

Difficultés collatérales liées au calcul

Pour travailler la division euclidienne à l'école, il me semble nécessaire d'introduire un symbolisme spécifique pour la division avec reste : l'écriture 43 = (8x5) + 3 ne montre pas qu'il s'agit d'une autre « opération ». Personnellement, je suis favorable à la « réhabilitation » de l'écriture qui existait avant les années 1970, 43 : 5 = 8 reste 3 même si l'expression n'est pas correcte mathématiquement – le signe égal n'est pas transitif… - cette écriture existe dans d'autres pays.

La propriété de la troncature doit être reliée à la division : dans 4567, il y a 4 milliers 4567 : 1000 = 4 reste 567 (et aussi 4567 = (4x1000)+567) ; dans 4567, il y a 45 centaines 4567 : 100 = 45 reste 67 (et aussi 4567 = (45x100)+67) ; dans 4567, il y a 456 dizaines 4567 : 10 = 456 reste 7 (et aussi 4567 = (456x10)+7).

Ceci permettrait de travailler le sens de la division (et pas seulement celui des problèmes de division) en amont d'un algorithme complexe de calcul. Ceci pose aussi la question de la place des propriétés des opérations : notamment celle de la commutativité de la multiplication. Et aussi, du même coup, celle de l' « égalité » de quotients : qu'on partage une quantité n en p parts égales et qu'on cherche la taille q d'une part ou qu'on partage une quantité n en parts de taille p et qu'on cherche le nombre q de parts. Il est probable que plusieurs approches successives de ce problème sont souhaitables.

Le cas du CP

J'indique des éléments spécifiques pour le CP. La question des conversions ne s'y pose pas de la même façon que dans la suite de la scolarité.

Il existe un problème d'ordre cognitif relativement à la dizaine.

La dizaine, comme unité, est-elle accessible au CP ? Que signifie cette question ? Il s'agit de savoir si les élèves sont capables de développer un double point de vue sur une quantité : voir à la fois dix unités et une dizaine dans une même collection d'objets. En particulier, il faut savoir compter **un** (dizaine), quand il y a **dix**.

Sur ce point, les publications internationales sont partagées : certaines affirment que oui, d'autres affirment que non (Van der Walle 2007). Par exemple, en Allemagne, on n'enseigne au grade 1 que les nombres jusqu'à vingt, avec un travail important sur leurs décompositions additives, notamment le passage par dix.

Ce qui semble acté : il faut avoir bien compris ce qu'est le nombre dix pour comprendre ce qu'est la dizaine, comme unité. Ceci rejoint les reproches de Brissiaud (op. cité) sans reprendre son argumentaire lié au rétablissement du comptage en 1986. Ceci rejoint probablement (vu ce que j'en connais) le *jeu des annonces* dans le travail actuel de Quilio (2014, diaporama présenté au CS des IREM en juin 2014) et le projet ACE à partir de l'ingénierie de Brousseau. Ceci rejoint aussi Ma (1999) sur les connaissances des enseignants chinois par rapport aux enseignants américains.

Connaître un nombre signifie connaître ses décompositions et aussi les nombres qu'on peut composer « simplement » avec lui. Il faut donc avoir une bonne maîtrise des premiers nombres, sûrement jusqu'à dix (en particulier, les compléments à dix, 10 – 3 = 7, et leurs diverses manifestations : 10 = 7 + 3 ; 3 = 10 – 7….). Bien connaître le nombre dix est indispensable. D'autres décompositions peuvent être utiles pour bien comprendre ce qu'est le nombre dix : des décompositions additives, 2+3+5, voire les décompositions multiplicatives de dix. Savoir qu'on a dix doigts et savoir « faire des nombres sur ses doigts » est probablement utile.

Avant d'aborder les dizaines, c'est-à-dire la dizaine comme unité, il semble aussi nécessaire de connaître les décompositions avec dix de tous les nombres de la deuxième dizaine, à savoir les nombres entre dix et vingt (par exemple 14 = 10+4). Sur le plan de l'apprentissage de la numération décimale, c'est le passage par dix qui est important (et non celui par 5 par exemple). Le travail des nombres entre dix et vingt va renforcer la compréhension de dix, il va permettre de travailler les tables d'addition, il va stabiliser un peu plus la connaissance des premiers nombres.

Attention toutefois, il ne faut pas se méprendre : ce n'est pas parce que les élèves savent décomposer les nombres avec dix (14 = 10 + 4) – même de façon très fluide - qu'ils ont compris la dizaine. En effet, on ne peut pas comprendre ce qu'est une unité tant qu'on n'en a pas compté plusieurs, or l'enjeu est, selon moi, de connaître la dizaine comme unité. D'où la nécessité de proposer, ensuite, aux élèves de dénombrer (et de fabriquer) de grandes collections (avec plusieurs comptines : de un en un, de dix en dix et peut-être aussi de une dizaine en une dizaine).

A mon avis, sur le plan cognitif, dès le CE1, les élèves devraient pouvoir accéder à la dizaine, à la centaine comme unités de compte. On voit dans les travaux de Tempier au CE2, qu'au moins certaines fois, ce sont les enseignants qui « rabattent » les élèves sur le matériel : alors que les élèves parlent de centaines, les enseignants leur répondent en termes de sachets… On voit la même chose au CM2 avec les décimaux dans la situation évoquée, le maître contraint les élèves à « faire des échanges » alors qu'ils parlent spontanément de « conversions » et qu'il faudrait leur apprendre à systématiser ce travail de conversion. Ces éléments montrent qu'il y a un fort potentiel d'apprentissages non exploité chez les élèves et qu'il est nécessaire de former les enseignants pour qu'il le soit.

La comptine numérique ou plutôt les comptines numériques

Mounier a mis en évidence plusieurs interprétations de la numération orale, on peut les retrouver dans des apprentissages de plus en plus fins de la comptine numérique et son utilisation dans des tâches de dénombrement.

Il faut une comptine de un en un jusqu'à vingt-neuf, pour réaliser les premières tâches de dénombrement et pour aider à percevoir la régularité (même partielle) des noms des nombres.

Il faut une bonne fluidité de la comptine orale de dix en dix : dix, vingt, … jusqu'à quatre-vingt-dix. Cette comptine de dix en dix servira d'appui pour une comptine de un en un étendue : trente-neuf / quarante.

Si les élèves comptent de dix en dix (ou font des sommes de dix, par addition), peut-être peuvent-ils compter les dix et associer un nombre de dix avec un nom de nombre : trois dix, c'est trente. Peut-être les élèves de CP peuvent-ils compter : une dizaine, et encore une dizaine, et encore une dizaine… Et finalement conclure qu'il y a trois dizaines.

Le code écrit

Le code écrit pour les nombres à deux chiffres est déjà connu en partie à l'entrée au CP, à un moment à préciser, il doit être déconstruit pour être reconstruit. Ceci signifie que « le chiffre de gauche » doit être mis en relation avec des dix ou des dizaines qu'on compte.

Quels usages de quels systèmes de signes ?

Les unités de numération

Si on considère que les unités de numération constituent un système de désignation que les élèves doivent apprendre, une réflexion sur les usages acceptables ou nécessaires dans l'ordinaire de la classe doit être conduite, par les commissions de programmes. Je livre ci-après quelques éléments de réflexions et quelques questions.

La question des abréviations

Dans ce texte, je n'ai utilisé aucune abréviation pour écrire les noms des unités de numération. Tout a été écrit en lettres : centaines, centaines de milliers, centième… Cela rend d'ailleurs la lecture des conversions parfois pénible. Dans le quotidien de la classe, la manipulation de telles écritures, en particulier par les élèves, et encore plus spécifiquement pour ceux qui écrivent lentement, risque d'être très lourde, voire insupportable.

Les abréviations m, c, d, et u sont assez répandues pour millier, centaine, dizaine et unité. Quand on en vient aux décimaux, comment abréger dixième, centième et millième ? Les abréviations M, C, D et U seraient-elles préférables ? Les abréviations d, c et m pourraient-elles alors être réservées aux unités fractionnaires ?

Comment abréger alors million, milliard ? Mio et Mrd existent.

Pour comprendre les grands nombres, c'est-à-dire le double système de l'oral à base mille et de l'écrit à base dix, il est nécessaire de faire fonctionner les deux relations : il y a mille milliers dans un million et il y a dix centaines de milliers dans un million. Quels signes, quelles abréviations, quel symbolisme utiliser à l'écrit ? Je crois que cm, dm, m déjà utilisées pour le système métrique ne seraient pas des abréviations pertinentes. Les abréviations CM, DM, M le seraient-elles ? Dans leur suite, CMrd, DMrd, Mrd, CMio DMio, Mio conviendraient-ils ?

On peut aussi se demander s'il est bien utile d'introduire des abréviations pour d'autres unités que : unité simple, dizaine, centaine, millier ? En effet, l'essentiel de ce qui est à comprendre pourrait être compris avec les relations entre ces 4 ordres d'unités ce qui rendrait inutile l'introduction ultérieure d'autres abréviations.

Pour restituer aux dizaines leur signification d'unités, il me semble nécessaire de pouvoir parler de dizaines d'étoiles ou de dizaines de timbres. Mais comment l'écrire, dans l'ordinaire de la classe ? intégralement : 7 dizaines d'étoiles ? 7 D étoiles ? 4 D timbres ? Les élèves peuvent-ils se limiter à écrire « D » et dans ce cas, doivent-ils écrire U ou étoiles ou timbres pour l'unité simple ?

Des systèmes matériels tels des étiquettes *mots* comme dans la situation des enveloppes ou la transposition d'étiquettes sur des tablettes par exemple peuvent constituer des pistes de réflexion intéressantes.

Un signe spécifique pour la division euclidienne

Comme je l'ai indiqué précédemment, je crois nécessaire l'introduction d'un signe spécifique pour division euclidienne. Cela permettrait probablement de progresser sur les techniques de calcul. Mais cela permettrait aussi une meilleure correspondance entre le registre du calcul et celui des unités.

La question de l'oral : comment parler les nombres dans la classe ?

Dans les pratiques actuelles ordinaires de l'enseignement de la numération des entiers « 100 » est *dit* cent. Pourtant, l'écriture chiffrée est un code dont l'enseignement doit être distingué de celui des noms des nombres. Faut-il alors inciter les enseignants à dire – momentanément – "un zéro zéro" ou « le nombre qui s'écrit avec "un zéro zéro" » ? Les unités de numération sont un système de désignation qui peut servir d'intermédiaire pour que soit véritablement pris en charge l'enseignement de ces deux codes distincts. Un des avantages de ce système est qu'il se dit *presque* comme il s'écrit. Dans l'ordinaire de la classe, quand la connaissance des noms des nombres de trois chiffres n'est pas très avancée, si l'enseignant veut *dicter* l'énoncé d'un exercice, un calcul à poser, un nombre à faire sur un compteur, le nombre *écrit* 195 peut-il être *dit* "un neuf cinq" ? Serait-il possible, voire préférable d'instituer une façon de *dire* du type suivant « écrire en chiffres le nombre une centaine neuf dizaines et cinq unités » ? Faut-il ne rien dire, écrire le nombre au tableau, et demander aux élèves de le copier ? Plus les nombres sont longs, plus la question des repères à prendre pour la copie est importante.

La question de l'oralisation des décimaux est cruciale. Les usages sociaux de cette écriture sont parfois inquiétants : par exemple un journaliste qui parle d'un record en « neuf secondes et trois-cent-vingt-cinq centièmes ». Les enseignants pourraient être incités à ne jamais utiliser les désignations de la forme « douze virgule trois-cent-quarante-cinq ». De telles désignations ne peuvent que renforcer l'idée qu' « un décimal, c'est deux entiers séparés par une virgule ». Les élèves pourraient être entraînés à *dire*, systématiquement, les décimaux sous une des formes suivantes : par exemple pour le décimal *écrit* 12, 345 *dire* « douze et trois-cent-quarante-cinq millièmes » ou « douze unités et trois-cent-quarante-cinq millièmes », voire « douze unités trois dixièmes quatre centièmes cinq millièmes ». Même si un élève ne comprend pas précisément comment fonctionne le code écrit au moment où on le lui enseigne, le fait de routiniser ces désignations et qu'il les utilise peut constituer un appui pour une compréhension différée.

Matériels, représentations analogiques des grandeurs et quantités

Les grandes collections

Si des grandes collections sont données à dénombrer aux élèves, il semble nécessaire de veiller à proposer au moins deux matériels différents, assez tôt, de façon à ce que le lexique introduit pour décrire les manipulations avec l'un ne soit interprété comme spécifique du matériel. Il est nécessaire que les élèves apprennent à utiliser les mêmes mots dans des contextes différents, à savoir avec des matériels différents.

Plus généralement, la question du rôle du matériel dans l'enseignement apprentissage de la numération est complexe. Chandler et Kamii (2009) font une revue de travaux sur cette question.

Droite graduée

La droite graduée mériterait un texte spécifique mais MJ Perrin avance des éléments intéressants dans sa contribution pour cette consultation. La droite graduée constitue un registre de travail pertinent pour les décimaux, souvent très mal utilisé notamment parce que l'unité de longueur – c'est-à-dire la distance entre 0 et 1 - n'y est en général pas construite. Le code n'est pas connu des élèves. Pour les entiers, les quelques éléments sur les performances des élèves (évaluation CE2, 2005) dont j'ai connaissance montrent qu'effectivement l'unité de longueur pose problème. A priori, c'est notamment un registre de travail intéressant car on peut représenter simplement des nombres assez grands sans effectuer de dénombrement laborieux.

Il existe d'ailleurs diverses applications sur tablettes avec la droite graduée pour la numération décimale des entiers.

Comment formuler les programmes ?

Unités versus échanges et groupements

Concernant la numération, il me semble qu'il faudrait réussir à dire aux enseignants que les échanges, les groupements et les décompositions additives ou multiplicatives ne sont pas le cœur de la numération, que ce sont les unités et les conversions qui le sont, auxquelles s'adjoignent les relations arithmétiques entre les nombres. Il faudrait réussir à montrer ce que ça change de penser cela.

Prudence

A ce jour, il n'y a pas, à ma connaissance, en France, de proposition suffisamment élaborée pour décliner un programme avec les unités. Toutefois, l'outillage développé depuis plusieurs années dans des recherches devrait permettre de faire des propositions raisonnables. En l'état actuel, j'adopterais des formulations peu contraignantes susceptibles d'être déclinées diversement dans des ressources.

Je prends l'exemple du CE1. Pour la partie nombres entiers incluant les éléments de calcul directement liés à la numération, les éléments suivants pourraient peut-être servir de point de départ :

- unités de numération : unité simple, dizaine, centaine ; relations entre unités
- dénombrement en unités, faire une collection donnée par un nombre d'unités. L'unité peut être l'unité simple, la dizaine ou la centaine.
- noms des nombres : traductions d'après les unités
- écriture chiffrée : principe de position d'après les unités ; correspondance avec les écritures additives
- conversions de complexité variable, problèmes de conversion
- suites écrites et orales de un en un, de dix en dix, de cent en cent, justifiées par les relations entre unités
- ordre des nombres, justifié par les relations entre unités. Problèmes de comparaison.
- multiplication, division par dix et cent. Justification par les unités.
- techniques opératoires de l'addition et de la soustraction. Justification des retenues par les unités.

Il ne faudrait surtout pas que l'enseignement de la numération se réduise à celui de conversions. Les unités, en numération, sont essentiellement un moyen pour comprendre la numération décimale et peuvent être utiles pour justifier la plupart des techniques où la numération positionnelle est impliquée.

A ces tâches et savoirs directement liées à la numération décimale d'autres tâches et savoirs liés à la structuration arithmétique des nombres entiers doivent être ajoutées. Les décompositions en unités de numération, regardées d'un point de vue additif et multiplicatif, permettent d'envisager les relations aux nombres dix, cent… par exemple : 307 = (3x100)+7. D'autres relations sont à connaître ou à explorer, notamment celles liées aux nombres 2, 5, 25, 60, etc. Cette structuration s'enrichit au fil des années.

Le problème général

Outre ce qui précède, formuler des programmes inclut un problème compliqué qui est celui des savoirs « en construction ». Ils ne sont pas faciles à formuler. Ils ne sont pas toujours faciles à repérer dans la classe. Des éléments mathématiques peuvent aider, des éléments didactiques aussi. Quoi qu'il en soit leur compréhension par les enseignants implique qu'on forme ces derniers. Comment formuler des « niveaux de maîtrise » ?

Ensuite, faut-il indiquer beaucoup de détails ? Je crois que plus on rentre dans la description précise des compétences, plus on risque de faire travailler des micro-tâches. Donc, je ne donnerais pas trop de détails dans un programme. Toutefois, il faut, quelque part – peut-être dans un document d'accompagnement -, donner des repères précis aux enseignants sur des tâches à proposer aux élèves pour conduire des apprentissages, et aussi des repères pour identifier les connaissances des élèves.

Les autres disciplines et la numération

Comme formatrice, j'ai travaillé avec des collègues d'EPS. En numération, c'est surtout à propos de la relation entre les longueurs et la numération, via le système métrique que les liens m'ont semblé les plus intéressants. Notamment avec le décamètre pour mesurer des longueurs, une dizaine de mètres, qui peut être mis en relation avec le mètre. On peut faire fabriquer un décamètre en matérialisant les mètres par des nœuds, et compter dix mètres. Puis reporter cet instrument, etc. Et aussi reporter le mètre. C'est intéressant comme manifestation de la dizaine. Le kilomètre peut être « éprouvé » dans la course, c'est le millier de mètres.

Au CM, voire au CE2, des calculs de durée, notamment des calculs d'écart pour la recherche de régularité, avec des temps en minutes et secondes peuvent constituer un détour intéressant pour les relations entre unités.

Attention au socle

Le socle doit être ambitieux. Par exemple, la connaissance des nombres entiers dans le socle ne peut pas être celle d'une liste de mots (organisée de un en un, de dix en dix, de cent en cent pour qu'on puisse la mémoriser plus facilement), qui s'écrivent avec des chiffres, qui se comparent, s'additionnent, se soustraient en se mettant l'un en dessous de l'autre. Je n'exclus pas que les connaissances actuelles de bons nombres d'élèves en fin d'école sur les nombres soit pourtant actuellement de cet ordre.

Références bibliographiques

Allard C. (2010) *Des cahiers pour apprendre ? Etude de pratiques enseignantes sur leurs traces écrites en mathématiques.* Mémoire de Master de didactique des mathématiques. Université Paris-Diderot.

Bezout, E., Reynaud, A. (1821). Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie. 9e edition

Brousseau G. (1983) Les « effets » du « contrat didactique ». *2e école d'été de didactique des mathématiques.*

Brousseau G. (2002) Les grandeurs dans la scolarité obligatoire, in Jean-Luc Dorier, Michel Artaud, Michel Artigue, René Berthelot, Ruhal Floris (coordonné par), *Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Corps (Isère) du 21 au 30 août 2001, La pensée sauvage éditions.

Brousseau G. (2004) Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 30, n° 2, 2004, p. 241-277.

Brissiaud R. (2013) *Apprendre à calculer à l'école, Les pièges à éviter en contexte francophone.* Ed. Retz.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* (Thèse de doctorat). Téléchargeable à http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/en/

Chambris, C. (2009). Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). In C. Ouvrier-Buffet & M.J. Perrin-Glorian (Eds.) (2009) *Actes du colloque DIDIREM: Approches plurielles en didactique des mathématiques.* (pp. 211–222) Paris: Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30, 317–366.

Chambris C. (2012a) Évolution des organisations mathématiques sur la numération au vingtième siècle en France. In Chambris C., Mounier, E., Nebout P., Perrin-Glorian M.-J (Eds). *Eclairages sur l'enseignement des nombres et de la numération à l'école primaire.* Cahier du laboratoire de didactique André Revuz, n°4, novembre 2012. (pp. 51-72)

Chambris, C. (2012b). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ?. *Grand N*, 89,39-69

Chambris, C. (2012c). Le système métrique au service de la numération des entiers et des grandeurs. in Durpaire, J.L. & Mégard, M. eds, *Le Nombre au cycle 3*, *Apprentissages numériques*. (pp13-30). France : SCEREN CNDP-CRDP.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/67/4/NombreCycle3_web_V2_226674.pdf

Chambris C. (soumis) Mathematical basis for place value throughout one century of teaching in France. *Contribution pour la conférence préparatoire à la 23e étude ICMI (primary mathematics education on whole number)*

Chandler C., Kamii C. (2009) Giving change when payment is made with a dime: The difficulty of tens and ones. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 97-118.

Chesné J.-F. (2014) *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation des enseignants centrée sur le calcul mental.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot.

Davydov, V. V. (1975). The psychological characteristics of the "prenumerical" period of mathematics instruction. In L. P. Steffe (Ed.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (Vol. 7, pp. 109-206). Chicago: The University of Chicago Press.

DEPP 2014 Évolution des acquis en début de CE2 entre 1999 et 2013 : les progrès observés à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 ne sont pas confirmés. *Note d'information de la DEPP n°19, 2014*. S. Andreu, M. Le Cam, T. Rocher

ERMEL (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire.* Cycle élémentaire. Tome 2. Paris: SERMAP-Hatier.

Fénichel M., Taveau C. (2008) *Enseigner les mathématiques au cycle 3* [Multimédia multisupport] : deux situations d'apprentissage en images : le cercle sans tourner en rond, l'enveloppe des nombres / Créteil : SCÉRÉN-CRDP, Académie de Créteil ,

Houdement C., Chambris C. (2013). Why and how to introduce numbers units in 1st-and 2nd-grades. In Behiye Ubuz, Çiğdem Haser, Maria Alessandra Mariotti, (Eds.) Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. 6-10 February 2013, Manavgat – Side / Antalya, Türkiye. (WG2, pp.313-322). http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Ma L. (1999) *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mounier E. (2010) Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot.

Numa-Bocage L., Masselot P., Vinatier I. (2007) « Comment rendre compte des difficultés rencontrées par une enseignante débutante dans la conduite d'une séance sur la dizaine au CP ? », Recherche et formation [En ligne], 56 | 2007, mis en ligne le 01 octobre 2011, consulté le 29 septembre 2014. URL : http://rechercheformation.revues.org/998

Perret, J. F. (1985). *Comprendre l'écriture des nombres.* Bern: P. Lang.

Quilio S. (2014) Des ingénieries coopératives pour la construction des nombres au LéA Saint-Charles. Quelques observations sur la place des grandeurs et mesures. Intervention au CS des IREM. http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/CS_-IREM_13_juin_2014_S_Quilio.pdf

Menotti G., Ricco G., (2007) Didactic practice and the construction of the personal relation of six-year-old pupils to an object of knowledge: Numeration. *European Journal of Psychology of Education*, Vol. XXII, nº 4, 477-495

Tempier F. (2013) *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot.

Thanheiser, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in mathematics Education*, 40/3, 251-281.

Van de Walle, J. A. (2007) *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally.* Pearson Education, Boston.