

# NOUVELLES ANALYSES DE L'ÉTUDE TIMSS *ADVANCED* 2015 EN MATHÉMATIQUES

## Une application du modèle d'analyse des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (NMFC)

---

Franck Salles

MEN-DEPP, bureau de l'évaluation des élèves

L'évaluation internationale TIMSS *Advanced* informe sur le niveau des acquis des élèves ayant suivi une formation scientifique à la fin de leur scolarité dans le secondaire. En France, les élèves de terminale scientifique sont la cible de cette évaluation. L'*International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) qui pilote le projet depuis son origine en 1995 a choisi d'évaluer les acquis des élèves au plus près de ce qui est effectivement enseigné dans leur pays. En mathématiques, le cadre de l'évaluation décrit donc un ensemble de contenus et de processus cognitifs appartenant à l'intersection des programmes d'enseignement des neuf pays concernés. Les résultats de la France, notamment sur le processus cognitif « appliquer » et dans le champ de la géométrie interrogent et nous incitent à analyser plus finement les tâches mathématiques des items de TIMSS *Advanced*.

Une analyse didactique des items de mathématiques a ainsi été menée à l'aide d'un outil d'analyse de tâches *a priori* que nous décrivons. Elle permet de mieux rendre compte de l'ensemble des questionnements de TIMSS *Advanced*, à un niveau d'études (terminale S) peu souvent exploré par les études internationales concentrées sur le primaire (TIMSS) ou la fin de la scolarité obligatoire (PISA).

L'analyse de l'ensemble des items, sous le regard de notre outil didactique, illustrée par quelques exemples, confirme la pertinence de ce modèle pour l'analyse des items d'une évaluation standardisée en mathématiques.

Elle met par ailleurs au jour la difficulté de concevoir un cadre commun à une évaluation internationale tenant compte des programmes de chaque pays participant, objectif affiché de l'IEA. Se situant à un niveau d'études avancées, TIMSS *Advanced* évalue pourtant l'acquisition de connaissances issues de savoirs enseignés dépendant de construits conceptuels différents et de choix institutionnels nationaux quant à l'enseignement des mathématiques. L'exemple de l'enseignement de la trigonométrie en France et aux États-Unis tient lieu d'illustration à ce propos.

**D'**après l'IEA et le *TIMSS and PIRLS International Study Center* du *Boston College* qui sont à l'origine de l'évaluation internationale *TIMSS Advanced*, « il est essentiel de veiller à ce que les élèves reçoivent des enseignements avancés en mathématiques et en physique. Cette préparation doit garantir leur entrée dans des études universitaires scientifiques exigeantes qui les préparent à des carrières en sciences, technologie, ingénierie et mathématiques (STEM). [...] Il est ainsi important pour les pays de comprendre les résultats mathématiques et scientifiques de ces élèves qui deviendront la prochaine génération de scientifiques et d'ingénieurs. *TIMSS Advanced* est la seule évaluation internationale qui cible ce groupe spécifique d'étudiants et fournit des informations essentielles sur leur progrès en mathématiques et en physique » [IEA 2014, p. 3]. Elle évalue ces élèves dans leur dernière année du secondaire. En France, les élèves de terminale dans la filière scientifique (terminale S) sont ciblés par l'étude.

Cette évaluation a pour but de renseigner chaque pays participant sur la proportion des élèves suivant ces programmes avancés dans la population totale du même âge et leur niveau de performance en mathématiques ou en physique. Une double comparabilité est assurée, internationale et temporelle pour les pays ayant participé aux cycles précédents de 1995 et 2008. En France, 21,5 % de la population à 18 ans est inscrite en terminale S. En termes de performance mathématique, les neuf pays se répartissent en quatre groupes, la France faisant partie de l'avant-dernier groupe. Elle était en tête de classement en 1995 et accuse en vingt ans une baisse de plus d'un écart-type [LE CAM et SALLES, 2016]. Cette performance peut être croisée avec des dimensions contextuelles collectées dans des questionnaires concernant les programmes, les élèves, leurs enseignants et leur établissement.

L'évaluation *TIMSS Advanced* est construite à partir de l'étude des programmes des neuf pays participants<sup>1</sup>. Cette recherche de consensus a donné lieu à un cadre d'évaluation construit autour d'une classification de contenus mathématiques et de processus cognitifs communs. Néanmoins, la classification *TIMSS* ne distingue pas, par exemple, les questions qui évaluent les techniques de calcul de celles qui les mettent en œuvre en tant qu'outil dans la résolution d'un problème. Après avoir décrit les lignes principales du cadre de *TIMSS Advanced* et notamment les trois domaines cognitifs qui sous-tendent l'activité mathématique dans ses exercices, nous montrerons comment une classification alternative à ces domaines cognitifs, par niveaux de mise en fonctionnement de connaissances (NMFC) initialement construite pour mieux rendre compte des acquis des élèves au PISA 2012 en culture mathématique [RODITI et SALLES, 2015], peut être adaptée pour mieux décrire l'ensemble des réussites et des échecs des élèves à cette évaluation.

---

## DESCRIPTION DU CADRE *TIMSS ADVANCED*

Le cadre théorique de l'évaluation *TIMSS Advanced* a été initialement conçu en 1993 [ROBITAILLE, SCHMIDT *et alii*, 1993] pour le premier cycle de l'étude en 1995. À l'époque, il est le produit d'une étude sur les *curricula* des pays engagés, l'objectif étant, comme aujourd'hui, de concevoir un cadre se trouvant à l'intersection des programmes des pays. Il a été mis à jour en 2008, puis en 2015, les deux autres années où l'évaluation a eu lieu. Pour cette dernière année, les modifications sont mineures par rapport à 2008 (année où la France n'a pas participé).

---

1. États-Unis, France, Italie, Liban, Norvège, Portugal, Fédération de Russie, Slovénie, Suède.

En mathématiques, la publication du cadre [IEA, 2014] mentionne que les programmes des États-Unis, notamment le *Common Core State Standards for Mathematics*, de Singapour et de Hong Kong (même si paradoxalement, ces derniers ne participent pas à TIMSS *Advanced*), ont servi de références aux modifications mineures apportées pour l'évaluation de 2015.

Ce cadre se décline selon deux dimensions principales : une dimension relative aux contenus mathématiques et une dimension cognitive reposant sur une déclinaison des processus de pensée auquel les élèves sont *a priori* confrontés dans les items de mathématiques du test [IEA, 2014, p. 13].

La dimension relative aux contenus mathématiques est divisée en trois domaines : algèbre, analyse et géométrie. Nous pouvons d'ores et déjà ainsi noter que les contenus relatifs aux probabilités ou aux statistiques ne sont pas évalués dans TIMSS *Advanced*.

La dimension cognitive est divisée en trois domaines : « connaître », « appliquer » et « raisonner ». Le premier domaine, « connaître », concerne la capacité des élèves à mémoriser et à reconnaître les faits, procédures et concepts nécessaires à une base solide de connaissances mathématiques [IEA, 2014]. Le deuxième domaine, « appliquer », se concentre sur l'utilisation de ces connaissances au service de la résolution de problèmes *via* une modélisation ou la mise en œuvre d'une stratégie [IEA, *op. cit.*]. Le dernier domaine cognitif, « raisonner », inclut les capacités d'analyse, de synthèse, de généralisation et de justification à l'aide d'arguments mathématiques ou de preuve. Les situations proposées dans ce dernier domaine sont souvent non familières ou complexes.

Le **tableau 1** est une traduction personnelle de celui fourni dans le descriptif du cadre rédigé par le *TIMSS and PIRLS International Study Center* dans ses pages 14 et 15. Il permettra au lecteur de mieux appréhender le contenu de ces trois domaines cognitifs.

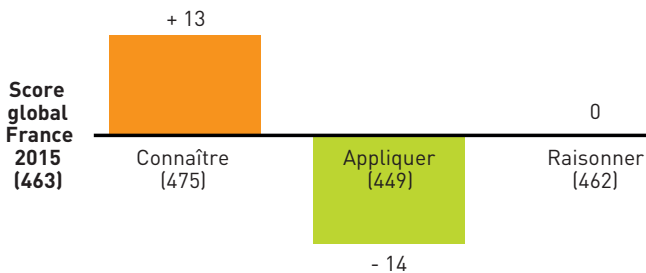
📄 **Tableau 1 Description des domaines cognitifs TIMSS *Advanced* (IEA, 2014)**

|                  |                          |  |
|------------------|--------------------------|--|
| <b>Connaître</b> | Mémoriser                | Mémoriser des définitions, terminologies, notations, conventions mathématiques, faits numériques et propriétés géométriques                  |
|                  | Reconnaître              | Reconnaître des objets mathématiques équivalents (par exemple : différentes représentations d'une même fonction)                             |
|                  | Calculer                 | Mettre en œuvre des procédures (par exemple dériver des polynômes, résoudre des équations du premier degré)                                  |
|                  | Prendre de l'information | Prendre de l'information dans différentes représentations : graphiques, tableaux, textes ou autres   |
| <b>Appliquer</b> | Choisir                  | Choisir les méthodes, outils ou stratégies efficaces et appropriées à la résolution de problèmes pour lesquels ils sont communément utilisés |
|                  | Représenter/modéliser    | Mettre en équation ou représenter graphiquement un problème ; trouver des représentations équivalentes                                       |
|                  | Réaliser                 | Mettre en œuvre des stratégies et opérations pour résoudre des problèmes relatifs à des concepts et procédures familiers                     |
| <b>Raisonner</b> | Analyser                 | Identifier les composants d'un problème et déterminer quelle information, procédure ou stratégie est nécessaire pour le résoudre             |
|                  | Synthétiser              | Lier différentes connaissances, représentations ou procédures pour résoudre un problème  |
|                  | Évaluer                  | Déterminer la pertinence de stratégies ou solutions alternatives   |
|                  | Tirer des conclusions    | Inférer sur la base des données et d'un raisonnement   |
|                  | Généraliser              | Exprimer des relations en termes généraux  |
|                  | Justifier                | Produire des arguments mathématiques ou des preuves appuyant une stratégie, une solution ou une proposition                                  |

Si chacun de ces domaines contient des items à des niveaux de difficulté variés, une hiérarchie en termes de difficulté globale peut toutefois être identifiée parmi ces trois domaines (de « connaître » à « appliquer » puis à « raisonner »). Pourtant, et de façon surprenante, cette hiérarchie n'est pas constatée dans les résultats des élèves de France. En effet, le domaine « appliquer » a été celui où les élèves se sont trouvés les moins performants par rapport à leur score global ↘ **Figure 1**. Ce constat n'est pas spécifique à la France. La Suède et le Portugal voient également leur score moyen dans le domaine « appliquer » significativement inférieur à celui du domaine « raisonner » même si c'est en France que l'écart est le plus grand. On ne constate pas de tels écarts entre ces deux domaines dans les autres pays<sup>2</sup>.

Ces différences interrogent la capacité de ce cadre à rendre compte des connaissances des élèves et de leurs capacités à les solliciter, notamment dans les domaines cognitifs où l'initiative leur est laissée quant au choix des stratégies ou des procédures à mettre en œuvre pour répondre. Du point de vue des comparaisons internationales, permet-il une analyse fine du niveau des acquis de connaissances mathématiques en fin de scolarité secondaire d'un pays à l'autre ? Nous tenterons de répondre à ces questions dans la deuxième partie de cet article en confrontant ce modèle théorique avec un autre, issu de la recherche en didactique des mathématiques, auparavant mis en œuvre par RODITI et SALLES [2015] pour l'évaluation PISA 2012, par niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (NMFC).

↘ **Figure 1** Profil de performance de la France selon les domaines cognitifs



Source : TIMSS Advanced 2015 ; LE CAM et SALLES, 2016.

Éducation & formations n° 94 © DEPP

## NOUVELLE ANALYSE DES ITEMS DE TIMSS ADVANCED PAR LES NMFC

Cet article ne reviendra pas en détail sur les fondements du modèle des NMFC qui seront seulement brièvement présentés. Le lecteur intéressé se référera à l'article publié dans le numéro 86-87 de cette même revue, concernant de nouvelles analyses du PISA 2012 en mathématiques [RODITI et SALLES, 2015]. En revanche, cette partie abordera un ajout important qui lui a été apporté afin que cet outil d'analyse *a priori* des tâches mathématiques dans les items d'évaluation permette d'identifier et de décrire plus précisément l'ensemble de celles de TIMSS Advanced.

2. Voir **annexe 1** p. 55.

Les NMFC sont répartis en deux dimensions. Dans l'une, la connaissance mathématique est utilisée comme *outil* [DOUADY, 1986] pour résoudre un problème. Les trois catégories, *directe*, *avec adaptation* et *avec intermédiaire*, permettent de couvrir les items du test (questions) de cette dimension dans leur ensemble, en tenant compte de la variété des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu. La mise en fonctionnement est *directe* lorsque l'élève obtient directement la réponse attendue par la mise en œuvre d'une procédure unique, potentiellement automatisable par l'élève. Dans la deuxième catégorie, les tâches mathématiques nécessitent que l'élève adapte ou transforme l'énoncé avant d'appliquer ses connaissances. Dans le niveau supérieur, *avec intermédiaire*, la mise en fonctionnement des contenus nécessite que l'élève introduise de manière autonome un ou plusieurs intermédiaires utiles dans sa démarche de résolution : décomposition du problème en étapes, objets mathématiques, notations...

La seconde dimension permet de décrire les tâches dans lesquelles la connaissance est l'*objet* [DOUADY, *op. cit.*] de l'évaluation. Comme l'article de RODITI et SALLES [2015] le mentionne : « *certaines questions d'évaluation portent sur des contenus mathématiques pour attester de leur compréhension pour eux-mêmes ; elles visent le caractère objet de ces contenus. Il en va ainsi de nombreux exercices classiques d'entraînement de calcul numérique ou algébrique où les élèves attestent de leur capacité à effectuer une opération sans même que soit interrogée l'opportunité de poser cette opération dans un problème. Comme cela a déjà été expliqué, il n'y a pas d'items de la sorte dans PISA.* » Or TIMSS *Advanced* contient un nombre non négligeable d'items de calculs. Dans ces items, la connaissance interrogée est de l'ordre de l'*intelligence du calcul* telle que l'a définie Michèle ARTIGUE [ARTIGUE, 2005]. C'est-à-dire que la connaissance calculatoire est évaluée pour elle-même, sans être mise en relation avec une situation, intra-mathématique ou contextualisée, pour laquelle le calcul serait nécessaire en tant qu'outil au service de la résolution. La réussite à un item de calcul témoigne de la disponibilité chez l'élève d'un *répertoire* [ARTIGUE, 2005] attestant, d'une part, de sa connaissance de faits numériques ou de formules diverses, par exemple en analyse pour dériver des fonctions usuelles, mais aussi et surtout, d'autre part, de techniques, de méthodes et de situations de référence lui permettant de s'adapter à des calculs non routiniers. L'intelligence du calcul suppose aussi l'acquisition d'un certain niveau de *flexibilité* entre différents cadres mathématiques [DOUADY, *op. cit.*] et registres sémiotiques, points de vue ou représentations d'un même objet mathématique [DUVAL, 1995]. Pour regrouper ces items de calculs qui figurent dans le questionnaire TIMSS *Advanced*, nous introduisons une catégorie que nous nommons *intelligence du calcul* (ou plus simplement *calcul*) en référence à l'apport de Michèle ARTIGUE sur cette question. Elle est ajoutée à la catégorie *concept* dans la dimension *objet* des NMFC. Elle permettra donc d'identifier chez les élèves la disponibilité de *répertoires* et la *flexibilité* nécessaires à conduire des calculs selon leurs *spécificités* dépendantes des champs interrogés par TIMSS *Advanced* dans lesquels ils s'inscrivent : « *Même s'ils partagent un fond commun, les calculs en combinatoire arithmétique, algèbre, analyse, géométrie, probabilité et statistiques ont chacun leur intelligence propre liée aux caractéristiques des objets qu'ils engagent, aux représentations disponibles pour ces objets et à leur mode de traitement, aux stratégies de calcul spécifiques du domaine... C'est une intelligence propre qui prend ses racines dans l'épistémologie propre à chacun de ces domaines.* » [ARTIGUE, *op. cit.*]. Les domaines de contenus mathématiques interrogés par TIMSS *Advanced* donnent lieu à des items de calcul vectoriel (en géométrie), arithmétique et algébrique (en algèbre), ainsi que de limites, différentiel et intégral (en analyse).

L'item présenté dans la **figure 2** illustre le besoin d'un tel ajout à la classification NMFC. Le calcul de limite est interrogé ici en dehors de tout contexte, la fonction rationnelle ne modélisant aucune situation. Il n'a donc pas le statut d'outil pour une résolution de problème mais est interrogé pour lui-même, en tant qu'objet, afin de mesurer les capacités des élèves à purement calculer. Pourtant l'item n'a pas comme seul objectif d'évaluer une compréhension qualitative du concept de limite. Ce concept détermine plutôt les contours de *spécificités* de calcul à mettre en œuvre alors que la réussite de l'item requiert davantage qu'une maîtrise conceptuelle. C'est pourquoi la catégorie « concept » initialement définie pour le PISA n'est pas non plus appropriée pour cet item. Un ajout à l'outil d'analyse est donc nécessaire.

► **Figure 2 Premier exemple d'item TIMSS Advanced**

Déterminez la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - a}{ax^2 + 2x}$  pour  $a \neq 0$ .

(A)  $\frac{1}{a}$

(B)  $-\frac{a}{a+2}$

(C)  $+\infty$

(D)  $0$

© 2015 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).  
 Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

**Source :** TIMSS Advanced 2015 Assessment.

Procédons maintenant à une analyse de tâche *a priori* de cet item. Il s'agit de calculer la limite en l'infini d'une fonction rationnelle constituée de polynômes de même degré 2 au numérateur et au dénominateur. Le coefficient de plus haut degré est 1 au numérateur et un paramètre  $a$  non nul au dénominateur. C'est une question à choix multiples contenant la bonne réponse et trois distracteurs. Dans le cadre TIMSS *Advanced*, cette question est classée dans la catégorie de contenu « analyse » et dans le domaine cognitif « appliquer ». Pour calculer la limite en l'infini d'une fonction rationnelle, les élèves peuvent solliciter une technique sous réserve d'être disponible dans leur *répertoire* de techniques de calcul (au sens d'ARTIGUE) : dans le cas de polynômes de même degré, la limite à l'infini est le rapport des coefficients des termes de plus haut degré, ici  $1/a$ . Dans le cas où cette connaissance n'est pas disponible dans le répertoire des élèves pour le calcul de limites de fonctions, il faudra alors se placer dans un registre algébrique et solliciter un répertoire de calcul algébrique consistant à transformer l'expression en une expression équivalente dont la limite se calcule directement par somme et produit de limites. On pourra par exemple factoriser  $x^2$ , puis par simplification se ramener à calculer directement la limite infinie de  $(1 - a/x^2)/(a + 2/x)$ . Les élèves pourraient aussi travailler avec une technique concernant seulement les termes de plus haut degré (déterminant la limite à l'infini) et conserver seulement  $x^2$  au numérateur et  $ax^2$  au dénominateur pour simplifier enfin par  $x^2$  et obtenir  $1/a$ .

Nous voyons ainsi que selon que le calcul direct de limite en l'infini d'une fonction rationnelle est disponible dans le répertoire de calcul en analyse de l'élève, ou que doit être sollicitée la flexibilité d'un changement de registre vers un calcul algébrique pour transformer l'expression, les activités mathématiques nécessaires pour réaliser cette même tâche attestent d'intelligences de calcul de niveaux différents. La catégorie « calcul » n'apparaît donc pas homogène quant au niveau d'intelligence de calcul. Certaines tâches nécessitent la mise en œuvre directe d'une connaissance appartenant à un *répertoire* préalablement défini. D'autres en revanche nécessiteront un niveau de mise en fonctionnement de ces connaissances plus avancé lorsqu'elles feront appel à une *flexibilité* de calcul en adaptant l'énoncé dans des registres ou des cadres différents, tout en faisant là encore appel à un *répertoire*. Deux sous-catégories se dégagent ainsi parmi les items évaluant l'intelligence de calcul : ceux faisant seulement appel à un *répertoire* de techniques, de stratégies et de situations de calcul mobilisables et ceux nécessitant une *flexibilité* de calcul par adaptations de l'énoncé dans des registres, des cadres ou des points de vue différents.

Les autres catégories d'items définies dans l'article de RODITI et SALLES restant inchangées, notre classification contient ainsi six catégories réparties dans deux dimensions comme illustrées dans la **figure 3**.

↳ **Figure 3 Dimensions et catégories du modèle d'analyse des NMFC**

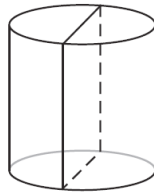
| Objet      |             | Outil   |         |            |               |
|------------|-------------|---------|---------|------------|---------------|
| Calcul     |             | Concept | Directe | Adaptation | Intermédiaire |
| Répertoire | Flexibilité |         |         |            |               |

Éducation & formations n° 94 © DEPP

Mais revenons à notre exemple d'item de calcul de limite. L'analyse de tâche *a priori* doit nous permettre de classer l'item dans une des catégories en considérant le niveau d'intelligence le plus faible requis pour le résoudre et en supposant que les connaissances minimales nécessaires soient acquises. L'acquisition de ces connaissances s'opérant dans l'institution éducative du pays concerné, il est naturel de penser qu'elle dépendra des programmes d'enseignement de ce pays. Ainsi notre analyse doit-elle se placer du point de vue des programmes scolaires : les répertoires de calcul mobilisables par les élèves, par exemple, sont dépendants des contenus des programmes scolaires. En France, la notion de limite en l'infini d'une fonction est abordée pour la première fois par les élèves en classe de terminale scientifique. La limite en l'infini d'une fonction rationnelle n'est pas enseignée directement, dans le cas de deux polynômes de même degré, comme étant le quotient des coefficients des termes de plus haut degré. Ainsi cet item n'évalue pas seulement chez les élèves de France leur niveau d'acquisition d'un *répertoire* de calcul de limites de fonctions mais plutôt la capacité de *flexibilité* par le passage puis le travail nécessaire dans le registre algébrique de transformation de l'expression en une autre, équivalente, dont la limite est calculable à l'aide d'un répertoire se limitant à la limite d'une somme et d'un quotient, cette fois au programme [MEN, 2011, p. 4].

L'analyse par l'outil des NMFC d'un second exemple d'item permet de porter un regard complémentaire à la classification de TIMSS *Advanced*. Tout comme le précédent, cet item est classé par les concepteurs de l'IEA dans le champ de l'analyse et dans le domaine cognitif « appliquer », cependant l'activité mathématique en jeu dans ces deux items est bien différente. C'est ce que l'analyse *a priori* par le modèle des NMFC permet de montrer.

↘ **Figure 4** Deuxième exemple d’item TIMSS *Advanced*



L’intersection d’un cylindre et d’un plan contenant son axe est un rectangle de 6 m de périmètre. Le rayon du cylindre vérifiant cette condition et ayant le volume maximal est

- (A) 2,5 m
- (B) 2 m
- (C) 1,5 m
- (D) 1 m
- (E) 0,5 m

© 2015 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).  
 Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

**Source :** TIMSS *Advanced* 2015 Assessment.

Le problème est issu d’une situation de géométrie ↘ **Figure 4**. Un cylindre de hauteur et de rayon variables obéit à la contrainte selon laquelle son intersection avec un plan contenant son axe est un rectangle de 6 mètres de périmètre. Une figure en perspective cavalière illustre l’énoncé, un tel rectangle étant représenté. La question porte sur la valeur du rayon qui optimise le volume du cylindre. Les connaissances mathématiques en jeu dans cette question sont évaluées dans leur dimension d’outils au service de la résolution. Elles concernent bien entendu des éléments de géométrie dans l’espace et la connaissance du cylindre de révolution, mais l’essentiel du travail mathématique porte ici sur l’étude d’une fonction, celle qui exprime le volume en fonction du rayon, qu’il faudra exprimer dans un registre algébrique. Ainsi, même si plusieurs cadres [DOUADY, 1986] sont en jeu, le point de vue des concepteurs a été de considérer celui dans lequel la plus grande partie de l’activité devra se porter : l’analyse. Pour résoudre ce problème, donc, un changement de cadre est nécessaire. Le volume d’un cylindre s’exprimant selon le rayon de sa base et sa hauteur (cette connaissance est inscrite dans le formulaire en début du cahier de passation), une étape intermédiaire importante nécessite d’exprimer la hauteur  $h$  en fonction du rayon  $R$ , qui prend ainsi le statut de variable, en utilisant la contrainte du rectangle de section de périmètre 6 m. D’où :

$$h = 3 - 2R.$$

Notons que cette étape nécessite un retour dans le cadre géométrique pour analyser la figure et constater que la hauteur et le diamètre du cylindre sont les deux côtés du rectangle. En remplaçant dans l’expression du volume  $V$ , on obtient après développement :

$$V(R) = 3\pi R^2 - 2\pi R^3$$

Il s’agit maintenant de trouver le rayon pour lequel cette fonction atteint un maximum. Ici une calculatrice peut être utilisée afin de passer dans un registre graphique et déterminer ce maximum graphiquement ou encore afin de tester la valeur du volume selon les cinq



possibilités proposées dans la question à choix multiples pour choisir celle qui donnera la plus grande. Alternativement, dériver la fonction  $V$  est possible afin d'en étudier les variations. L'introduction de l'expression du volume en fonction du rayon, entièrement à la charge de l'élève, ainsi que l'ensemble des étapes précédentes, nous font classer cet item dans la catégorie « intermédiaire » de la classification des NMFC.

Comme pour le PISA, le modèle d'analyse des NMFC est pertinent pour l'analyse de TIMSS *Advanced* dans la mesure où il permet de mieux rendre compte des modalités de mise en œuvre des connaissances mathématiques des élèves. Dans le premier item, l'élève effectue, en dehors de tout contexte et de problème à résoudre, un calcul explicitement demandé par la consigne. L'évaluation porte sur l'*intelligence du calcul* de l'élève, suivant que des connaissances portant sur les limites de fonctions rationnelles peuvent être directement sollicitées ou qu'une flexibilité de calcul algébrique est nécessaire pour transformer l'expression et faire ensuite appel à un répertoire autour des opérations de limites. Dans le second, les connaissances relatives à l'étude des variations d'une fonction polynôme de degré 3 sont mises en fonctionnement dans un problème d'optimisation en géométrie nécessitant de nombreuses étapes de raisonnement ainsi que l'introduction d'étapes et d'objets mathématiques intermédiaires, et ceci entièrement à l'initiative de l'élève. Si ces deux items évaluent le même domaine « appliquer » du point de vue des experts de l'IEA, ils ne sont absolument pas équivalents quant au niveau de mise en fonctionnement des connaissances. La réussite ou l'échec à ces deux items ne témoignent donc pas du même niveau d'acquisition (le premier est réussi par 46 % et le second par 25 % des élèves de terminale S). C'est ce dont la classification NMFC permet justement de mieux rendre compte.

## APPORTS DE L'ANALYSE PAR LES NMFC

Les items de l'évaluation TIMSS *Advanced* 2015 ont été soumis au nouveau modèle d'analyse *a priori* des NMFC afin d'être classés dans les cinq catégories *calcul*, *concept*, *directe*, *adaptation* et *intermédiaire*. Dans cette section, nous analysons ainsi l'ensemble des items de l'évaluation selon les domaines cognitifs, les champs mathématiques et les NMFC. La répartition des 101 items du test TIMSS *Advanced* 2015 est relativement équitable selon les champs mathématiques et les domaines cognitifs. L'algèbre est légèrement surreprésentée par rapport à la géométrie. Le domaine « appliquer » est légèrement plus souvent interrogé que les deux autres domaines « raisonner » et « connaître ». Le **tableau 2** donne la répartition des items selon ces deux dimensions. Nous constatons que peu d'items de géométrie interrogent le domaine « connaître » tandis que peu d'items d'algèbre se placent dans le domaine « raisonner » alors que la répartition dans les trois domaines est équitable en analyse.

📄 **Tableau 2** Champs mathématiques et domaines cognitifs TIMSS *Advanced* 2015

|                      | Connaître | Appliquer | Raisonner | Total général |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| Algèbre              | 14        | 16        | 7         | 37            |
| Analyse              | 11        | 11        | 12        | 34            |
| Géométrie            | 7         | 13        | 10        | 30            |
| <b>Total général</b> | <b>32</b> | <b>40</b> | <b>29</b> | <b>101</b>    |

La répartition des items selon les champs mathématiques et les NMFC montre que 40 des 101 items du test interrogent la dimension *objet* des connaissances mathématiques ↘ **Tableau 3**. C'est une particularité par rapport à l'évaluation PISA 2012 où seuls 7 items sur 85 concernaient cette dimension. TIMSS *Advanced* porte donc plus souvent son questionnement sur le calcul et la compréhension qualitative de concepts mathématiques. Ces concepts sont plus souvent liés à des connaissances d'analyse (continuité, dérivabilité, asymptotes, convexité, notamment). Les niveaux de mise en fonctionnement dans la dimension *outils* sont relativement équitablement répartis : 17 items à procédure directe, 20 nécessitant une adaptation de l'énoncé, 24 l'introduction d'intermédiaires ↘ **Tableau 3**. Il faut noter qu'une grande majorité des items d'algèbre sont classés dans la catégorie directe alors que près de la moitié des items de géométrie le sont dans la catégorie intermédiaire, constat similaire à la classification par domaine cognitif.

↘ **Tableau 3 Champs mathématiques et NMFC TIMSS *Advanced* 2015**

|                      | Calcul    | Concept   | Directe   | Adaptation | Intermédiaire | Total général |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|------------|---------------|---------------|
| Algèbre              | 8         | 6         | 11        | 6          | 6             | 37            |
| Analyse              | 7         | 12        | 3         | 5          | 7             | 34            |
| Géométrie            | 2         | 5         | 3         | 9          | 11            | 30            |
| <b>Total général</b> | <b>17</b> | <b>23</b> | <b>17</b> | <b>20</b>  | <b>24</b>     | <b>101</b>    |

Éducation & formations n° 94 © DEPP

Lorsqu'il s'agit de confronter la classification de TIMSS *Advanced* par domaines cognitifs avec la classification des NMFC, nous constatons que ces deux classifications ne sont pas indépendantes ↘ **Tableau 4**. L'analyse de la mise en relation entre les deux modèles nous permet cependant d'expliquer le constat fait en introduction de cet article des difficultés majeures des élèves sur les items de la catégorie « appliquer ». Sur les 40 items de ce domaine, 17 correspondent au niveau de mise en fonctionnement de connaissances le plus élevé. Ces tâches nécessitant l'introduction d'intermédiaires à l'initiative des élèves, elles attestent d'un niveau d'acquisition plus avancé. La grande proportion de tels items dans le domaine « appliquer » peut être un élément explicatif important des difficultés des élèves sur ce domaine.

↘ **Tableau 4 Domaines cognitifs et NMFC TIMSS *Advanced* 2015**

|                      | Calcul    | Concept   | Directe   | Adaptation | Intermédiaire | Total général |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|------------|---------------|---------------|
| Connaître            | 11        | 9         | 6         | 5          | 1             | 32            |
| Appliquer            | 5         | 2         | 7         | 9          | 17            | 40            |
| Raisonner            | 1         | 12        | 4         | 6          | 6             | 29            |
| <b>Total général</b> | <b>17</b> | <b>23</b> | <b>17</b> | <b>20</b>  | <b>24</b>     | <b>101</b>    |

Éducation & formations n° 94 © DEPP

Si les deux classifications ne sont pas indépendantes, comme il a été mentionné plus haut, comment expliquer qu'autant d'items nécessitant l'introduction d'intermédiaires soient considérés comme relevant du domaine « appliquer » par les experts de l'IEA ? Nous tenterons de donner une piste d'explication dans la partie suivante par l'analyse d'un item de trigonométrie.

## LA CLASSIFICATION NMFC SELON LES PROGRAMMES INTERNATIONAUX

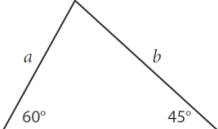
Procédons à l'analyse *a priori* de la tâche mathématique embarquée dans l'item présenté à la **figure 5**. Après avoir constaté que le triangle n'est pas rectangle par un calcul d'angle mobilisant la somme des angles dans un triangle, l'élève peut mettre en œuvre deux procédures différentes selon que ses connaissances de trigonométrie s'inscrivent dans les triangles rectangles seuls ou s'étendent aux triangles non rectangles. Dans le premier cas, il faudra se ramener à des triangles rectangles en introduisant la hauteur correspondant à la base d'où les angles de  $45^\circ$  et  $60^\circ$  sont représentés. On pourra ensuite exprimer la longueur dans les deux triangles rectangles ainsi formés, identifier les deux expressions et en déduire ainsi le rapport recherché. Dans le second cas, la loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin(45)} = \frac{b}{\sin(60)}$$

peut être utilisée avec une adaptation consistant à élever au carré, remplacer les sinus des angles par leur valeur et obtenir ainsi le rapport demandé. Nous voyons ainsi que le niveau de mise en fonctionnement des connaissances requises dans cet exercice dépend de la disponibilité de ces connaissances chez les élèves. Selon la NMFC, si la loi des sinus est disponible, nous classons cet item dans la catégorie *avec adaptation*. Mais si elle ne l'est pas, la hauteur doit être introduite en objet intermédiaire et nous classerions donc l'item dans ce cas dans la catégorie *avec intermédiaire* des NMFC, l'introduction de la hauteur restant à l'initiative de l'élève.

Or la disponibilité de la loi des sinus chez les élèves évalués par TIMSS *Advanced* ne relève pas seulement de leur niveau d'acquis. Elle relève aussi des contenus enseignés à l'issue de l'enseignement secondaire dans leur pays.

### Figure 5 Troisième exemple d'item TIMSS *Advanced*



Déterminez  $\frac{a^2}{b^2}$ .

(A)  $\frac{2}{3}$

(B)  $\frac{3}{2}$

(C)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(D)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

© 2015 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).  
 Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Source : TIMSS *Advanced* 2015 Assessment.

Ainsi, si nous voulons étudier le niveau des acquis des élèves de France, nous devons placer notre analyse et notre tentative de classification de cet item de trigonométrie dans le cadre des programmes scolaires français de lycée de la filière scientifique. Or les savoirs enseignés en trigonométrie au lycée en France dès la seconde, le sont le plus souvent autour du cercle trigonométrique plutôt que dans les triangles quelconques. Si nous cherchons la trigonométrie dans les programmes de première scientifique, nous trouvons uniquement référence au cercle trigonométrique et aucune mention de généralisation au triangle non rectangle n'est inscrite au programme ➤ **Figure 6.**

➤ **Figure 6 Extrait des programmes de mathématiques de première scientifique 2010**

|   |  |  |
|---|--|--|
| <p><b>Trigonométrie</b><br/>Cercle trigonométrique.</p> <p>Radian.</p> <p>Mesure d'un angle orienté, mesure principale.</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliser le cercle trigonométrique, notamment pour :             <ul style="list-style-type: none"> <li>- déterminer les cosinus et sinus d'angles associés ;</li> <li>- résoudre dans <math>\mathbf{R}</math> les équations d'inconnue <math>x</math> :<br/><math>\cos x = \cos a</math> et <math>\sin x = \sin a</math>.</li> </ul> </li> </ul> | <p>L'étude des fonctions cosinus et sinus n'est pas un attendu du programme.</p> |
|---|--|--|

Éducation & formations n° 94 © DEPP

Dans le programme de terminale scientifique, le lien doit être fait entre le cercle trigonométrique et les fonctions sinus et cosinus ainsi qu'avec la forme trigonométrique d'un nombre complexe. Ainsi, au niveau institutionnel des programmes des élèves de France, la loi des sinus n'est pas explicitement enseignée.

Tenant compte de cet apport à notre analyse, l'item de trigonométrie ci-dessus doit être classé dans la catégorie « intermédiaire », du point de vue des programmes de France. Or, TIMSS classe cet item dans la catégorie « appliquer ». À la lecture de la liste de contenus relatifs à la trigonométrie dans le cadre de TIMSS, ce choix prend tout son sens puisqu'on peut y lire : « *utiliser la trigonométrie pour résoudre des problèmes dans le triangle* » [IEA, *op. cit.* ; traduction de l'auteur]. Le caractère « rectangle » du triangle n'est pas spécifié, ce qui permet de supposer que la trigonométrie dans des triangles non rectangles est un attendu de TIMSS *Advanced*. La loi des sinus est donc une connaissance dont l'utilisation est interrogée par l'évaluation, ce dont atteste le fait que cette loi, ainsi que le théorème d'Al-Kashi, sont donnés dans le formulaire en début de cahier, formulaire qui, soit dit en passant, n'est pas systématiquement consulté par les élèves, encore moins pour y rechercher une formule dont ils ne connaissent pas l'existence. Ce constat interroge sur la capacité de TIMSS *Advanced* à atteindre son objectif de placer son cadre d'évaluation à l'intersection des programmes des pays participants.

Il nous apparaît pertinent à ce moment de l'analyse de nous pencher sur le système éducatif des États-Unis qui a, entre autres, servi de référence à la mise à jour du cadre TIMSS *Advanced* en 2015 [IEA, *op. cit.*]. Une consultation du site Internet *Common Core State Standards Initiative* [2017], décrivant les contenus d'enseignement en mathématiques dans la plus grande partie des États, suffit à constater que le choix de l'enseignement de la trigonométrie au lycée est conceptuellement différent de celui de la France.

On y lit en effet :

*"Apply trigonometry to general triangles  
 (+) Derive the formula  $A = 1/2 ab \sin(C)$  for the area of a triangle by drawing an auxiliary line from a vertex perpendicular to the opposite side.  
 (+) Prove the Laws of Sines and Cosines and use them to solve problems.  
 (+) Understand and apply the Law of Sines and the Law of Cosines to find unknown measurements in right and non-right triangles (e.g., surveying problems, resultant forces)."*

La mention de la loi des sinus est explicite et même centrale dans les programmes de la plupart des États du pays. Du point de vue du système éducatif des États-Unis, donc, cet item n'atteste pas du même niveau de mise en fonctionnement des connaissances qu'en France. Il serait classé dans la catégorie *avec adaptation* des NMFC.

Une étude des réponses des élèves de France et des États-Unis à l'item illustrant cette partie a été menée afin de quantifier le nombre d'élèves répondants ayant utilisé la loi des sinus dans l'exercice. Elle ne contredit pas l'étude des programmes de ces deux pays. S'agissant d'une question à choix multiple, aucune justification de réponse n'était requise par l'énoncé et de nombreux élèves ont répondu dans les deux pays sans laisser de trace écrite. Toutefois, nous avons pu déterminer que 18 % des réponses américaines attestaient d'une utilisation explicite de la part de l'élève de la loi des sinus (avec ou sans réussite) contre 8 % en France. Enfin, signalons que cet item est réussi par 43 % des élèves aux États-Unis contre 29 % en France. De manière générale, dans l'ensemble des items de trigonométrie de TIMSS *Advanced*, les élèves de France se sont trouvés parmi les plus en difficulté et les élèves des États-Unis les plus à l'aise ↘ **Tableau 5**.

Si nous nous penchons plus particulièrement sur les items de trigonométrie classés dans le domaine « appliquer » par l'IEA, nous constatons qu'ils sont tous classés dans la catégorie

#### ↘ **Tableau 5 Réussite des élèves français et états-uniens aux items de trigonométrie (en %)**

| Code des items de trigonométrie | % de réussite |             |
|---------------------------------|---------------|-------------|
|                                 | France        | États-Unis  |
| M2_10                           | 42,1          | 33,2        |
| M2_11                           | 29,4          | 22,4        |
| M3_10                           | 51,7          | 57,5        |
| M4_09                           | 29,1          | 43,3        |
| M4_10                           | 13,2          | 35,8        |
| M5_09                           | 37,0          | 60,1        |
| M5_10                           | 0,7           | 2,7         |
| M6_11                           | 34,1          | 36,5        |
| M6_12                           | 2,1           | 1,2         |
| M7_10                           | 40,4          | 50,7        |
| M7_12                           | 26,9          | 26,6        |
| M8_11                           | 24,0          | 29,9        |
| M9_11                           | 39,2          | 56,1        |
| <b>Moyenne</b>                  | <b>28,5</b>   | <b>35,1</b> |

*intermédiaire* des NMFC selon les programmes français de la filière scientifique du lycée, à l'exception d'un seul qui nécessite une mise en fonctionnement directe des connaissances portant sur la trigonométrie dans le triangle rectangle. Tous les autres portent sur l'utilisation des lois des sinus ou du théorème d'Al-Kashi (loi des cosinus en anglais), ce qui explique les difficultés des élèves de France à ces items.

---

## CONCLUSION

L'analyse de l'ensemble des items de TIMSS *Advanced* 2015, sous le regard de notre outil didactique des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances, adapté pour mieux rendre compte des acquis des élèves de terminale en calcul, confirme sa pertinence pour l'analyse des items d'une évaluation standardisée en mathématiques, comme il l'avait fait précédemment pour le PISA 2012. Par une analyse au niveau des items de l'évaluation, elle a permis d'expliquer une partie des résultats des élèves, notamment dans le domaine cognitif « appliquer » et le champ de la géométrie, révélant entre autres une problématique de l'enseignement de la trigonométrie dans les triangles quelconques en France.

Elle met par ailleurs au jour la difficulté de concevoir un cadre commun à une évaluation internationale tenant compte des programmes de chaque pays participant, objectif pourtant affiché de l'IEA. Les différences de classification selon les pays, identifiées par la présente étude, révèlent des différences de niveaux de mise en fonctionnement requis pour l'utilisation des connaissances mathématiques suivant qu'elles sont ou non explicitement enseignées dans les pays. Sans nul doute est-ce une gageure, compte tenu de la complexité des contenus évalués, d'atteindre un consensus en fin d'études secondaires plutôt qu'au grade 4 ou au grade 8, niveaux où TIMSS a également évalué les élèves d'une cinquantaine de pays en 2015. Mais une étude similaire à celle engagée ici pour TIMSS *Advanced* pourrait être menée à ces niveaux inférieurs pour le confirmer. L'étude de MARTINEZ et RODITI publiée dans ce volume de la revue *Éducation & formations* montre, par exemple, que les élèves de France sont davantage mis en difficulté que ceux des autres pays lorsqu'il leur est demandé de comparer des fractions. Elle montre aussi que la comparaison des fractions ne leur est pas enseignée, alors qu'elle l'est dans les autres pays [MARTINEZ et RODITI, 2017]. L'analyse du niveau des acquis des élèves à partir des résultats d'une étude internationale telle que TIMSS *Advanced* est dépendante des programmes scolaires ou *curricula* des pays et ne saurait être complète par la seule entrée de son cadre international. Les évaluations internationales standardisées pourraient ainsi enrichir encore la réflexion sur l'enseignement des mathématiques dans le secondaire, lorsque les résultats des élèves sont analysés à la lumière des contenus et pratiques propres aux programmes et *curricula* de chaque pays.

---

## Annexe 1

**SCORES GLOBAUX TIMSS *ADVANCED* 2015 ET SELON  
LES DOMAINES COGNITIFS. ERREURS STANDARD (ES)  
ET DIFFÉRENCE « APPLIQUER » – « RAISONNER ».**

| Pays                 | Score moyen global | ES    | Score moyen « connaître » (32 items) | ES    | Score moyen « appliquer » (40 items) | ES    | Score moyen « raisonner » (29 items) | ES    | Différence score « appliquer » et score « raisonner » | SIG |
|----------------------|--------------------|-------|--------------------------------------|-------|--------------------------------------|-------|--------------------------------------|-------|---|-----|
| France               | 463                | (3,1) | 475                                  | (2,7) | 449                                  | (3,4) | 462                                  | (3,1) | - 13  | ↓   |
| Suède                | 431                | (4,0) | 405                                  | (4,7) | 434                                  | (3,6) | 447                                  | (3,9) | - 13  | ↓   |
| Portugal             | 482                | (2,5) | 479                                  | (3,0) | 476                                  | (2,9) | 488                                  | (3,5) | - 12  | ↓   |
| Norvège              | 459                | (4,6) | 445                                  | (4,1) | 459                                  | (5,1) | 469                                  | (4,4) | - 10  |     |
| États-Unis           | 485                | (5,2) | 488                                  | (5,7) | 480                                  | (5,5) | 484                                  | (5,3) | - 4   |     |
| Liban                | 532                | (3,1) | 543                                  | (4,5) | 529                                  | (3,8) | 527                                  | (3,9) | 2   |     |
| Fédération de Russie | 485                | (5,7) | 478                                  | (6,7) | 491                                  | (6,1) | 484                                  | (5,3) | 7   |     |
| Italie               | 422                | (5,3) | 423                                  | (5,5) | 425                                  | (5,4) | 411                                  | (5,9) | 14  |     |
| Slovénie             | 460                | (3,4) | 466                                  | (3,5) | 465                                  | (4,0) | 442                                  | (4,0) | 23  | ↑   |

Éducation &amp; Formations n° 94 © DEPP

**Lecture :** la différence entre le score de la France dans le domaine « appliquer » et le domaine « raisonner » est significative et de - 13 points.

**Source :** IEA-DEPP.

## ▾ BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M., 2005, « L'intelligence du calcul », *Le calcul sous toutes ses formes*, Actes de l'Université d'été de Saint-Flour.

*Common Core State Standard Initiative*, 2017, <http://www.corestandards.org/Math/Content/HSG/SRT/>

DOUADY R., 1986, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 7/2, p. 5-32.

DUVAL R., 1995, *Semiosis et Noesis*, Berne, Peter Lang.

IEA, 2014, *TIMSS Advanced 2015 Assessment Frameworks*, I.V.S. Mullis and M.O Martin, Editors, p. 9-15.

LE CAM M., SALLES F., 2016, « Les performances des élèves de terminale S en mathématiques - Évolution sur vingt ans », *Note d'information*, n° 16.35, MENESR-DEPP.

MARTINEZ S., RODITI É., 2017, « Programme scolaire et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire : quelques enseignements tirés de TIMSS 2015 », *dans ce numéro*.

MEN, 2011, *Bulletin officiel spécial* n° 8 du 13 octobre 2011, Annexe - Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques, Classe terminale de la série scientifique.

ROBITAILLE D.F., SCHMIDT W.H., RAIZEN S.A., McKNIGHT C.C., BRITTON E., NICOL C., 1993, *TIMSS monograph no. 1: Curriculum frameworks for mathematics and science*, Vancouver, Canada, Pacific Educational Press.

RODITI É., SALLES F., 2015, « Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. Un autre regard sur les résultats », *Éducation & formations*, MENESR-DEPP, n° 86-87, p. 235-257.