RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

depp Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance

Calcul réfléchi, calcul mental, calcul en ligne au cycle 4 : que nous apprennent les données de la DEPP ?

Évaluation Cedre 2019
Mathématiques en fin de collège

Vincent BERNIGOLE, Céline HUGOT, Lise MALRIEU, Franck SALLES, Louis-Marie NINNIN

Série Études
Document de travail n° 2022-E09
Décembre, 2022

Calcul réfléchi, calcul mental, calcul en ligne au cycle 4 : que nous apprennent les données de la DEPP ?

Évaluation Cedre 2019
Mathématiques en fin de collège

Cet ouvrage est édité par le ministère de l'Éducation nationale
et de la Jeunesse

Direction de l'évaluation, de la prospective et de la
performance

61-65, rue Dutot
75732 Paris Cedex 15

Directrice de la publication
Fabienne Rosenwald

Vincent BERNIGOLE, Céline HUGOT, Lise MALRIEU, Franck
SALLES, Louis-Marie NINNIN

ISBN / e-ISBN
ISSN : 2779-3532

SOMMAIRE

↘ Analyse d'items issus de Cedre Mathématiques fin de collège 2019

Ce document présente une analyse d'items de calcul mental de *Cedre 2019* et des résultats obtenus, selon une classification entre automatismes et calcul réfléchi.

Les élèves de troisième qui ont passé l'évaluation *Cedre* en 2019 ont été soumis à 60 items de calcul mental, avec les modalités de passation suivantes : 10 items à résoudre en début de séquence, un délai de 30 secondes par item pour trouver la réponse, la nécessité d'écrire sur ordinateur pour donner la réponse, sans utilisation de calculatrice mais avec la possibilité d'utiliser un brouillon personnel. Dans les items de calcul mental proposés dans *Cedre 2019*, environ 50 % sont des items de calcul automatisé et 50 % sont des items de calcul réfléchi.

De façon générale, si nous remarquerons que ces items auraient pu très majoritairement être proposés à des élèves de fin de cycle 3, cela ne garantit en rien la réussite. Ce constat, comme nous le verrons, renforce l'idée déjà évoquée que des automatismes ou procédures mal ou non appris et/ou insuffisamment retravaillés par la suite ne sont pas ancrés et constituent un frein aux performances des élèves en calcul réfléchi.

Cette analyse des résultats est complétée de quelques items sur les puissances et sur les nombres premiers qui ne faisaient pas partie des items de calcul mental mais qui apportent des informations complémentaires intéressantes.

Pour chaque item analysé, la présentation de l'item est suivie d'un tableau rappelant les modalités de passation de l'item et les résultats statistiques précisant le taux de réussite, le taux de non-réponse ainsi que le groupe *Cedre 2019* auquel il correspond. En effet, dans l'évaluation *Cedre*, les élèves sont répartis en six groupes de niveaux en fonction de leurs performances : des groupes de plus faible niveau (groupe<1 et groupe 1) au groupe le plus performant (groupe 5). Les compétences de chaque groupe sont décrites dans une échelle de performances dont on peut trouver la description dans la note d'information de la DEPP [1]. De même, chaque item est associé à un des six groupes, en fonction des probabilités estimées de réussite selon les groupes. Certains items très difficiles ne sont pas réussis même par les élèves les plus performants (groupe 5), ils sont considérés comme « hors échelle ».

A- Items axés sur les automatismes

1. Faits numériques

Dans cette première partie, les items analysés utilisent des faits numériques. Résultats automatisés, les faits numériques doivent être mémorisés par les élèves et, par suite, immédiatement disponibles.

Ces faits numériques sont définis dans les programmes des cycles 2, 3 et 4.

Entretien des faits numériques aux programmes des cycles 2 et 3 ([2] et [3]) :
– Tables d'addition
– Tables de multiplication (de 2 à 11)
– Connaître les multiples de 25 et de 50
– Compléments à 10, compléments à 100, à 10^n, n > 2
– Compléments à la dizaine supérieure, compléments à la centaine supérieure, à une unité d'ordre supérieur
– Relations entre les nombres 5, 10 et 20
– Décompositions additives et multiplicatives de 10 et de 100
– Connaître les diviseurs de 100
– Doubles et moitiés de nombres d'usage courant
– Connaître des égalités entre des fractions usuelles : 1/10 = 10/100 ; 2/4 = 1/2 ; 5/10 = 1/2 ...

Quelques équivalences d'écritures selon le registre de représentation :
– 25 % est associé à 1/4 = 0,25
– 50 % est associé à 1/2 = 0,5

Peu de faits numériques sont testés tels quels dans l'évaluation *Cedre*, sans être combinés à au moins un module élémentaire de calcul ou sans intervenir dans un calcul réfléchi.

L'objectif de la bibliothèque des faits numériques n'est plus en effet, en fin de cycle 4, de fournir directement des réponses mais de servir de « brique » dans des calculs plus complexes faisant appel aussi aux propriétés des nombres et des opérations, par exemple. Des faits numériques maîtrisés favorisent par ailleurs la réussite en soulageant la mémoire de travail.

Comme nous allons le voir dans les exemples suivants, « connaître un fait numérique » doit permettre à l'élève de l'utiliser dans toutes ces déclinaisons.

Informations apportées par *Cedre 2019*

Voici quelques *exemples d'items nécessitant principalement de mobiliser un fait numérique de cycle 2 ou 3* :

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

100 divisé par 25 est égal à :

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
4	61,5 %	10,7 %	3

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Cet item fait appel au fait numérique 25 × 4 = 100.

Connaître le fait numérique 25 × 4 = 100, cela signifie automatiser 25 × 4 = 100 mais aussi ses « déclinaisons », à savoir :

100 ÷ 25 = 4 ; 100 ÷ 4 = 25, le quart de 100 est 25, 25 × ? = 100, 4 × ? = 100, etc.

Il n'est réussi que par 61,5 % des élèves en fin de cycle 4, ce qui signifie que le pourcentage d'élèves qui connaissent et sont capables de mobiliser ce fait numérique est au maximum de 61,5 %, et probablement moins si on fait l'hypothèse que certains élèves ont effectué le calcul sans erreur.

Presque 40 % des élèves ne sont pas capables de mobiliser le fait numérique dans cette situation et doivent avoir recours à du calcul.

L'erreur la plus fréquente est la réponse « 5 » (5,7 %), qui peut être interprétée comme une erreur de calcul.

Mais il est intéressant de constater que le cumul des réponses construites à partir de 25 (0,025 ; 0,25 ; 25 ; 2 500 ; etc.) atteint 7,3 %, ce qui fait penser à des confusions multiples autour de la question interprétée comme « 25 divisé par 100 ».

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

81 divisé par 9 est égal à :

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
9	84 %	6,8 %	1

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Cet item, bien réussi, est intrinsèquement lié à la maîtrise des tables de multiplication. Il peut même être considéré comme un fait numérique, si par « maîtrise des tables de multiplication », on entend la capacité à trouver le produit à partir des facteurs (sens d'apprentissage classique), mais aussi à

décomposer multiplicativement chacun de ces nombres-produits (ce qui est un attendu de cycle 2, [2] p.77) et à interpréter chacun des facteurs comme le quotient du produit par l'autre facteur.

Une seule réponse erronée se dégage statistiquement : « 8 » (3 %). Celle-ci peut certainement s'interpréter comme une erreur de mémorisation des tables de multiplication ou encore par l'utilisation d'une simplification avec une division par 10.

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

$25 \times 400 =$

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
10 000	47,6 %	16,1 %	4

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Cet item est peu réussi (moins de la moitié des élèves) : les faits numériques $25 \times 4 = 100$ et $25 = 100 \div 4$ ne sont majoritairement pas mobilisés.

On peut classer les réponses erronées en trois catégories :

- les puissances de 10 différentes de 10 000, de 10 à 10 000 000 (11,4 %) ;
- les nombres déclinés à partir de 4 (4 %) : 40 ; 400 etc. ;
- les nombres déclinés à partir de 25 (3 %) : 250 ; 2 500 etc. : il est probable que les élèves aient amorcé le calcul par 25×100.

Il existe de nombreuses procédures pour parvenir au résultat :

- passer par la décomposition $25 \times 4 \times 100$ puis associer deux des trois facteurs : 25×4 ou 25×100 ou 4×100. Ces trois catégories d'erreurs semblent liées chacune à un choix d'association initial, qui n'a pas abouti du fait que l'élève n'a pas réussi à gérer le troisième facteur ;
- passer par le fait numérique $25 = 100 \div 4$ puis chercher à calculer $(100 \div 4) \times 400$.

Remarquons que le fait numérique $25 \times 4 = 100$ ou le fait numérique $25 = 100 \div 4$ ne sont alors potentiellement mobilisés que par les 11,4 % d'élèves qui ont abouti à une puissance de 10.

Les items présentés ci-dessous utilisent *des faits numériques de cycle 4*.

Apprentissage des faits numériques de cycle 4 :
- Carrés parfaits de 1^2 à 12^2 (et racines carrées associées)
- Nombres premiers inférieurs à 30

Informations apportées par *Cedre 2019*

Calculer mentalement puis écrire le résultat.

La racine carrée de 25 est égale à :

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
5	73,8 %	9,4 %	2

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Ce fait numérique est maîtrisé par les trois quarts des élèves. Plusieurs réponses erronées peuvent être analysées :

Réponse 50 (3,5 %) : deux confusions successives, d'abord entre « racine carrée » et « carré », puis entre « carré » et « double ».

Réponse 625 (1,3 %) : confusion entre « racine carrée » et « carré ».

Réponse 100 (1,5 %), deux confusions successives, d'abord entre « racine carrée » et « carré », puis sur le calcul de l'aire d'un carré de côté 25 (qui serait 4×25 au lieu de 25^2).

Réponse 12,5 ou assimilée (1,2 %) : confusion « racine carrée » et « moitié » (division par 2). Cette erreur attendue est finalement peu fréquente.

Si on échange les chiffres de 79 on obtient 97. Ces deux nombres sont des nombres premiers.

Quelle paire de nombres a la même propriété ?

- ○ 25 et 52
- ○ 13 et 31
- ○ 39 et 93
- ○ 23 et 32

Modalités de passation : calculatrice autorisée - Temps de réponse non limité			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
13 et 31	52,1 %	3,1 %	3

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Il s'agit d'un QCM.

Cet item est traité par quasiment tous les élèves mais le taux de réussite associé au format QCM de l'item (par comparaison des autres items à questions ouvertes) peut questionner la maîtrise effective de la définition de nombre premier.

Voici la répartition des réponses des élèves :
- 25 et 52 (14,5 %)
- 13 et 31 (52,1 %)
- 39 et 93 (23,3 %)
- 23 et 32 (7 %)

L'erreur majoritaire (39 et 93) porte sur le seul distracteur qui comporte deux nombres impairs. Les élèves excluent majoritairement les distracteurs où apparaissent un nombre pair, ceci semble être un critère connu de non-primarité. On peut aussi penser que le choix de cette réponse peut être associée à l'exclusion des couples où certains nombres sont « dans les tables de multiplication », comme 25 et 32.

Pour les deux autres distracteurs, la fréquentation de certains nombres semble jouer un rôle : 32, avec ses nombreuses décompositions multiplicatives, est un nombre très présent dans les exercices.

En revanche, 39 (= 3 × 13) est peu utilisé, impair, et de ce fait se trouve assimilé par certains élèves à un nombre premier. La question se pose néanmoins avec 25, nombre pourtant très fréquenté, mais qui est considéré comme un nombre premier par près de 15 % des élèves.

2. Procédures automatisées

Dans cette seconde partie, les items analysés utilisent des procédures dites automatisées. Ces procédures sont définies dans les programmes des cycles 2, 3 et 4.

Entretien de procédures élémentaires (à une étape), qui ont vocation à être automatisées (programmes des cycles 2 et 3, [2] **et** [3]**)**
- Ajouter ou enlever 1
- Ajouter 9 ou un entier se terminant par 9 (19 / 29 / etc.)
- Enlever 9 ou un entier se terminant par 9 (19 / 29 / etc.)
- Multiplier un nombre décimal par 10, par 100, par 1 000
- Diviser un nombre décimal par 10, par 100, par 1 000
- Connaître les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10
- Multiplier un nombre décimal par 0,1
- Multiplier un nombre décimal par 0,5
- Multiplier un nombre par 5, par 25, par 50

Dès le cycle 3, le programme demande d'« Utiliser ces propriétés et procédures pour élaborer et mettre en œuvre des stratégies de calcul. », c'est-à-dire de les mobiliser dans le cadre de calculs réfléchis.

Informations apportées par *Cedre 2019*

Voici les résultats pour des *items utilisant la multiplication par 10 ; 100 ; 1 000 ou par 0,1 ; 0,01 ; 0,001*

Item 1	Item 2	Item 3
Calculer mentalement puis écrire le résultat : $26 \times 1000 =$	**Calculer mentalement puis écrire le résultat :** $4{,}6 \times 100 =$	**Calculer mentalement puis écrire le résultat :** $0,2 \times 100 =$

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes				
Item	Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
Item 1	26 000	90,3 %	2,4 %	<1
Item 2	460	65,2 %	6,2 %	3
Item 3	20	55,9 %	9,8 %	3

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Pour le premier item (item 1), le taux de réussite (plus de 90 %) et de non-réponse (très faible, à 2,4 %) montrent que la multiplication d'un entier par 1 000 est très majoritairement acquise, ainsi probablement que la multiplication d'un entier par 10 et 100, même si l'évaluation Cedre ne comportait aucun item pour s'en assurer.

Confrontons ces résultats avec ceux des autres items ci-dessus, mettant en jeu la multiplication d'un décimal non entier par 100 : le taux de non-réponse augmente mais reste assez faible ; par contre, le taux de réussite baisse fortement. Quand on s'intéresse aux erreurs majoritairement commises, on trouve les attendues :

$$4{,}6 \times 100 = 4{,}600 \text{ et } 4{,}6 \times 100 = 400{,}6, \text{ ainsi que } 4{,}6 \times 100 = 4\,600.$$

Ceci montre que la règle « pour multiplier un nombre entier par 10, par 100 ou par 1 000, on écrit des 0 à droite du nombre entier » est automatisée par 16 % des élèves, sans qu'ils soient conscients du cadre de sa validité (pour 4,600 et 4 600) et/ou sans qu'ils fassent de lien avec la numération (pour 400,6, où l'on trouve la mauvaise compréhension du décimal comme juxtaposition de deux entiers).

L'absence de sens donné à ce type de calcul par les élèves est renforcée par le fait que le calcul $0{,}2 \times 100$ est le moins bien réussi de la série, alors que c'est celui qui s'appuie le plus facilement sur la numération : $0{,}2 \times 100 = 2/10 \times 100 = 2$ dizaines, avec la connaissance que dans une dizaine, il y a 100 dixièmes.

On peut interpréter ces résultats : les « astuces » (« ajouts » de 0 ou décalage de virgule), présentées sous forme de règles et bien souvent données en classe pour les entiers comme pour les décimaux, mettent les élèves facilement en réussite sur le court terme et peuvent ainsi donner à l'enseignant, une impression fausse de compréhension de ce qui s'y joue. Par ailleurs, le retour au sens n'est pas systématiquement assuré en 6^e^ : dans un sentiment d'urgence en collège, l'astuce de décalage de virgule prime sur le retour au sens. Chez les élèves, cela peut se transformer en un amalgame de règles, à plus forte raison si ce type de calculs n'a pas été pratiqué récemment.

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

$7,9 \times 0,01 =$

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
0,079	21,4 %	19,4 %	5

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Ce calcul met en jeu le produit d'un décimal par 0,01. Au niveau des programmes, ce type de calcul intervient en fin de cycle 3 (6[e]) et est souvent travaillé en même temps que la multiplication d'un décimal par 10, 100 ou 1 000.

Clairement ici, l'application d'une règle mal maîtrisée du type « pour multiplier un nombre par 0,01, on décale la virgule vers la … de … rang(s) » prédomine dans les erreurs :
- 8,2 % des élèves décalent bien la virgule de 7,9 vers la gauche mais d'un seul rang au lieu de deux ;
- 5 % des élèves décalent la virgule vers la droite, d'un rang.
- Enfin, 5 % des élèves répondent le nombre pris au départ, soit 7,9.

Ces 10 % d'élèves (5 % + 5 %) ne semblent pas disposer de moyens de contrôle, sur les ordres de grandeur notamment, avec le fait que multiplier un nombre par un nombre inférieur à 1 donne un produit plus petit que le nombre de départ.

Les items analysés dans la suite utilisent des techniques de calcul étudiées davantage en cycle 4.

Apprentissage et travail sur de nouvelles techniques de calcul de cycle 4
Changement de registre d'écriture : décimale ↔ fractionnaire Application d'un opérateur fractionnaire, d'un pourcentage Produits et quotients de puissances de 10 (en s'appuyant sur la définition) Techniques de calcul portant sur les nombres relatifs Techniques de calcul portant sur les fractions Différentes procédures de calcul d'une quatrième proportionnelle

Informations apportées par *Cedre 2019*

Exemples sur les nombres relatifs

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

$(-2) \times (-5) =$

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
10	66,9 %	9,1 %	2

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Les erreurs classiques de calcul sur les relatifs apparaissent majoritairement : -10 (16,1 %) et 7 (2,1 %), montrant les confusions entre techniques d'addition et de multiplication des relatifs.

Cet item est réussi à partir du groupe 2, l'échec semble typique des élèves en difficulté dans tous les domaines mathématiques.

Exemples sur les puissances

Nous analyserons seulement deux items sur les puissances qui montrent des résultats assez satisfaisants pour des items testant des connaissances en cours d'appropriation.

$(10^2)^5$ est égal à

- ○ 10^7
- ○ 10^{10}
- ○ 10^{25}
- ○ 10^{32}

Modalités de passation : calculatrice autorisée - Temps de réponse non limité			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
10^{10}	72 %	2 %	2

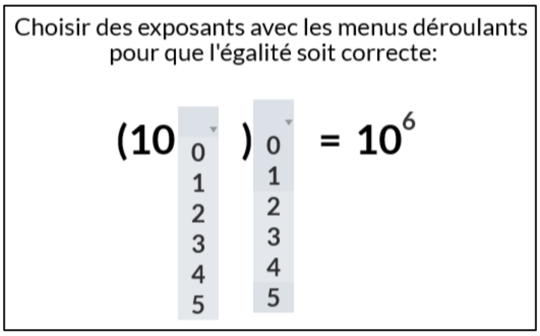
Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :

Cet item se présente sous forme d'un QCM avec trois distracteurs.

Voici la répartition des réponses des élèves :
- le distracteur 10^7 est choisi par 15 % des élèves ;
- le distracteur 10^{25} attire 10,5 % des élèves, avec deux interprétations possibles : la juxtaposition des exposants 2 et 5 pour former l'exposant 25, ou l'exposant 25 obtenu en calculant 5^2 ;
- le dernier distracteur 10^{32} attire très peu d'élèves, ce qui tend à favoriser la première interprétation parmi les deux précédentes, même si 5^2 est plus simple à calculer que 2^5.

Dans tous les cas d'erreurs, il s'agit de manipulations incorrectes sur les exposants 2 et 5, sans prise en compte d'ordre de grandeur. Il est possible que les élèves s'accrochent à des formules mal maîtrisées et déconnectées du sens, en dépit des préconisations du programme 2018 (consolidé en 2020) et des repères de progressivité (2018) qui disent explicitement : « *La connaissance des formules générales sur les produits ou quotients de puissances de 10 n'est pas un attendu du programme : la mise en œuvre des calculs sur les puissances découle de leur définition.* »



Modalités de passation : calculatrice autorisée - Temps de réponse non limité			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
$(10^2)^3$ ou $(10^3)^2$	59,6 %	11 %	3

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Si on compare cet item au précédent, l'élève devait proposer deux exposants entiers (chacun entre 0 et 5) pour que $(10^{\dots})^{\dots}$ soit égal à 10^6. C'est la situation inverse où il faut retrouver des exposants à partir du résultat.

Il y a plusieurs solutions possibles.

Le taux de réussite est cependant nettement inférieur au taux de réussite de l'item précédent (72 %) puisqu'il est de 59,6 %.

Cet item n'est majoritairement réussi qu'à partir du groupe 3. Il semble qu'on retrouve ici un manque d'habileté dans la recherche de décompositions multiplicatives.

B- Items nécessitant un calcul réfléchi

D'après Piolti-Lamorthe et Roubin [4], « Un des autres intérêts du calcul réfléchi est de favoriser les changements de cadres : langage naturel, schématisation, expression numérique, algébrique... permettant une approche différenciée des notions. Cela permet aussi de s'affranchir des difficultés de la syntaxe et des notations de calculs pour réfléchir aux priorités opératoires, aux règles de calcul mental... »

Le calcul réfléchi est aussi essentiel pour accompagner l'entrée dans le calcul algébrique.

Dans le calcul réfléchi, la compétence « représenter » est donc particulièrement mobilisée :
- Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique.
- Produire et utiliser plusieurs représentations des nombres.

1. Habiletés sur les nombres

Un nombre peut avoir plusieurs écritures, plusieurs représentations.

La réussite s'appuie principalement sur :
– la capacité à percevoir des liens entre les nombres en jeu dans le calcul,
– la capacité à les exploiter (par des décompositions additives ou multiplicatives, essentiellement) ; c'est-à-dire savoir qu'un nombre peut avoir plusieurs écritures et être capable d'en produire et de choisir celle(s) qui soi(en)t bien adaptée(s) dans le cas du calcul proposé.

Informations apportées par *Cedre 2019*

Exemple de différence de deux termes

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

235 − 136 =

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
99	49,4 %	19,9 %	3

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Plusieurs procédures sont possibles : décomposition additive de 235 en 136 + 100 – 1 ou décomposition du 136 en 135 + 1 (appui sur la notion de suivant).

Ces deux décompositions sont destinées à faire apparaître un écart de 100 entre les deux nombres, qui sont très proches « à une centaine près ». Elles sont donc liées aux nombres présents dans l'item. Si l'un des deux change, la décomposition choisie pour l'autre nombre change également (si on effectue 234 – 136, on décomposera alors 136 en 134 + 2, de façon à avoir un écart d'une centaine entre les deux).

Un enjeu de décomposition du 136 en 135 + 1 est de savoir ensuite gérer le calcul suivant : 235 – (135 + 1) = 235 – 135 – 1, qui est une habileté nécessaire en calcul littéral mais déjà présente dans ce calcul qui peut être posé dès le cycle 3.

Notons que poser cette soustraction mentalement est assez laborieux, et que cela peut expliquer en partie le fort taux de non-réponse (pour les élèves qui n'ont pas de stratégies de calcul mental disponibles dans ce cadre).

Une autre écriture possible de 235 est 136 + 100 – 1 pour se ramener au calcul

$$136 + 100 - 1 - 136 = 100 - 1 = 99$$

L'erreur majoritaire est 101 (9,2 %). Elle peut provenir de la décomposition du 136 en 135 + 1, cette décomposition étant mal gérée dans la soustraction 235 – (135 + 1) qui devient 235 – 135 + 1, calculs enchaînés de gauche à droite.

Les autres erreurs significatives proviennent d'erreurs de calcul, probablement liées à un calcul posé mené de tête avec oublis de retenues : 199 et 109 (4,2 %).

Exemples de sommes et différences de plus de deux termes

Calculer mentalement puis écrire le résultat :
2,5 + 3,7 + 1,2 + 0,3 =

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
7,7	51,6 %	12,9 %	3

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Si l'élève n'a pas une conception erronée d'un nombre décimal (deux entiers séparés par une virgule), une procédure efficace, qui s'appuie sur la maîtrise de l'aspect décimal de la numération et sur la maîtrise en acte des propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition, consiste à associer les nombres « qui vont bien ensemble », par exemple 3,7 avec 0,3 (complément à l'unité supérieure).

Cette procédure peut être associée à un raisonnement typique de numération, consistant à travailler dans une unité de numération pertinente, ici en dixièmes : ajouter 3,7 et 0,3, c'est ajouter 37 dixièmes et 3 dixièmes.

Voici l'analyse des réponses erronées obtenues les plus significatives :

- **Autres réponses du type 7,** (5,5 %) : amorce de l'addition avec la partie entière montrant un lien fait avec la partie décimale (une unité supplémentaire) mais la partie décimale non gérée.
- **Réponse 6,7** (3,4 %) : erreur montrant une bonne gestion de la partie décimale mais sans répercussion sur la partie entière.
- **Réponse 6,17** (2,6 %) : erreur typique d'une conception du décimal par juxtaposition de deux entiers.
- **Autres réponses du type 6,** (2,4 %) : amorce de l'addition par la partie entière, avec la partie décimale non gérée.

Calculer mentalement et écrire le résultat :

15,4 – 6,7 – 2,4 – 1,3 =

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
5	18,2 %	48,2 %	Hors échelle

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Le niveau de difficulté de cet item a manifestement découragé les élèves : seulement la moitié des élèves ont essayé de répondre.

Il comporte au moins trois étapes de traitement, ce qui le rend exigeant pour du calcul mental ; il est en revanche bien adapté à du calcul en ligne. Analysons d'abord les habiletés sur les nombres qui sont mobilisées.

15,4 – 2,4 – (6,7 + 1,3) : repérage des « nombres qui vont bien ensemble » au sens de l'addition (compléments à l'unité), utilisation en acte de la distributivité et enfin mémorisations intermédiaires.

D'autres procédures sont possibles, que nous détaillons dans la partie 3 sur les différentes interprétations d'une expression.

L'étude des résultats ne permet pas de dégager des erreurs typiques. Il semble toutefois qu'on repère des amorces de calcul commençant par la partie entière et échouant sur la partie décimale : résultat 6 (2,3 %).

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

524 – 44 + 176 – 56 =

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
600	18,2 %	50,9 %	Hors échelle

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Même s'il ne met en jeu que des entiers, cet item présente le même taux de réussite et à peu près le même taux de non-réponse que le précédent.

En mobilisant des habiletés sur les nombres, cet item peut être abordé de deux façons :
– Associer 524 et 44, qui vont « bien ensemble » pour la soustraction, ainsi que 176 et 56.
– Associer 524 et 176 qui vont bien ensemble pour l'addition, ainsi que 44 et 56 (compléments à 100).

Ainsi, ces deux items semblent montrer que ce n'est pas la nature des nombres (entiers ou décimaux non entiers) qui est un frein, mais la gestion de soustractions à plusieurs termes.

2. Combiner les décompositions des nombres et les propriétés des opérations

Voici d'autres items dont le taux de réussite est très bas. Ceux-ci ne font pas appel aux habiletés sur les nombres mais aux décompositions d'un des nombres et aux propriétés des opérations :

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

$11 \times 23 =$

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
253	34,8 %	14,6 %	4

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Les procédures attendues sont :

$$(10 + 1) \times 23 = 10 \times 23 + 1 \times 23 = 230 + 23 = 253$$

ou

$$11 \times (20 + 3) = 11 \times 20 + 11 \times 3 = 220 + 33 = 253$$

La première procédure est plus efficace (calculs plus simples, s'appuyant sur une procédure automatisée : produit d'un entier par 10).

Cet item est très majoritairement traité (à plus de 85 %), mais il n'y a qu'environ 35 % d'élèves qui répondent correctement.

Les erreurs significatives 233 (8,6 %), 230 (7,1 %), 23 (5,4 %) et 241 (3,9 %) semblent indiquer uniquement une utilisation de la distributivité à partir de la décomposition du 11 en 10 + 1 mais qui n'a pas été menée correctement à son terme :
Réponses 23 et 230 : seule la multiplication de 23 par 1 ou par 10 a été faite ;
Réponse 233 : erreur de calcul dans la dernière opération 230 + 23, peut-être due à une surcharge cognitive (mémorisation de 230 et de 23 puis somme à effectuer) ;
Réponse 241 : erreur dans l'utilisation de la distributivité ; 23 a bien été multiplié par 10, mais c'est le 11 qui a été multiplié par 1 puis ajouté à 230.

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

$306 \times 11 =$

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
3 366	22,5 %	24,4 %	Hors échelle

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Comme dans l'item précédent, on s'attend à une décomposition du 11 en 10 + 1 puis à l'utilisation de la distributivité.

Les constats sont les mêmes que pour l'item 11 × 23, ce qui montre que l'ordre des facteurs n'a pas eu d'influence significative sur les procédures utilisées (la commutativité de la multiplication est maîtrisée).

Cependant, un quart des élèves n'a pas répondu. On peut faire l'hypothèse que cela est lié à la différence de taille de nombre entre 306 et 23, qui semble gérable uniquement pour les élèves les plus performants. Pour les autres, on note souvent un non-engagement ou un abandon en cours de calcul.

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

$24 \times 5 =$

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
120	49,7 %	26,8 %	3

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Deux procédures efficaces *a priori* :
- procédure 1 : décomposition du 24 en 20 + 4 puis distributivité : (20 + 4) × 5 = 100 + 20 = 120 ;
- procédure 2 : décomposition de 5 en 10 ÷ 2 (la moitié de 10) puis associativité (24 × 10) ÷ 2.

La réponse 100 (1,9 %) est l'erreur majoritaire : elle peut provenir d'une confusion entre 24 × 5 et le fait numérique 25 × 4, ou d'une amorce de distributivité.

L'erreur 220 (1,2 %, peu fréquente) nous semble intéressante car, parmi les erreurs significatives commises, c'est la seule qui nous paraît provenir de l'utilisation de la procédure 2, avec une erreur dans la division finale par 2 sur les centaines.

En comparant avec les deux items précédents, le taux de non-réponse plus important, alors que les nombres sont plus petits, pose question : peut-être y a-t-il un automatisme créé par la présence du 11 qui induit l'utilisation de la distributivité, qui ne se produit pas ici avec le 24 ?

3. Les différentes interprétations d'une expression

Les items analysés ci-dessous peuvent aussi être traités en utilisant différentes interprétations d'une expression utilisant les connaissances suivantes :

Soustraire, c'est ajouter l'opposé.
Diviser, c'est multiplier par l'inverse.
Ces connaissances acquises en cycle 4 permettent de traiter certains items posés dans l'évaluation *Cedre 2019* et élargissent de ce fait les procédures possibles pour trouver le résultat de certains calculs.

Les deux items suivants ont été analysés dans la partie *1. Habiletés sur les nombres (page 15)*. Nous proposons ci-dessous une autre analyse de ces mêmes items en utilisant les différentes interprétations d'une expression.

Exemples sur la soustraction

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

524 – 44 + 176 – 56 =

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
600	18,2 %	50,9 %	Hors échelle

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :

Analysons maintenant cet item en regard des structures ; il peut être abordé de plusieurs façons, qui s'appuie toutes sur « soustraire, c'est ajouter l'opposé », utilisé en acte :

- (524 – 44) + (176 – 56), ce qui utilise mathématiquement l'associativité de l'addition :
- 524 + (– 44) + 176 + (– 56) = (524 + (– 44)) + (176 + (– 56)) ;
- (524 + 176) – (44 + 56), ce qui utilise mathématiquement la commutativité de l'addition et la distributivité ;
- (524 + 176) + (– 44 + (– 56)), ce qui utilise la commutativité et l'associativité de l'addition.

Calculer mentalement et écrire le résultat :

15,4 – 6,7 – 2,4 – 1,3 =

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
5	18,2 %	48,2 %	Hors échelle

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Cet item peut être traité en faisant appel à la distributivité en acte :

15,4 – (6,7 + 2,4 + 1,3),

en associant ensuite 6,7 et 1,3.

Remarque : Ces deux items ont déjà donné lieu à un début d'analyse dans *la partie* 1 sur l'habileté sur les nombres.

Dans ces calculs, le signe « – » semble perçu uniquement comme le symbole de la soustraction tel qu'il est enseigné dès le CP, donc un signe opératoire. Par expérience, cette expression n'est pas interprétée par les élèves comme une somme de relatifs. Or le passage de l'expression dans l'ensemble des nombres relatifs permet ensuite de mobiliser les propriétés de l'addition (commutativité et associativité), dont on peut voir dans d'autres items (comme par exemple l'item 2,5 + 3,7 + 1,2 + 0,3 = … avec un taux de réussite de 51,5 %, un taux de non-réponse de 13 % et du groupe 3) qu'elles sont majoritairement maîtrisées.

De plus ceci nous paraît expliquer également un certain nombre de difficultés récurrentes en calcul littéral avec l'utilisation de la distributivité $2x - (x + 7) = 2x - x - 7$ ou de la double distributivité $(x - 5)(x - 7)$.

Exemple sur la multiplication

Poursuivons cette partie en analysant les résultats de trois items d'apparence très proche : un nombre entier multiplié par 0,25.

Item 1

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

12 × 0,25 =

Item 2

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

22 × 0,25 =

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes				
Item	Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
Item 1	3	37,9 %	27,3 %	4
Item 2	5,5	22,2 %	42,8 %	5

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Nous retrouvons ici la structure de produit d'un entier par un décimal, mais ce décimal, placé en second facteur, est un fait numérique qui fait partie des programmes : 0,25 associé à 25 % et à 1/4.

Si on se place dans le registre du calcul réfléchi, ces trois items s'appuient sur la connaissance du fait numérique 0,25 = 1/4, donc ramènent la multiplication proposée à une division par 4. Cette entrée est favorisée par l'ordre des facteurs (0,25 étant systématiquement en second facteur).

On constate que le taux de réussite baisse notablement lorsque le nombre entier n'est pas un multiple de 4. Parallèlement, le taux de non-réponse augmente dans les mêmes proportions.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves qui maîtrisent le fait numérique ont répondu juste pour 12 × 0,25 car 12 est divisible par 4 (appui sur la connaissance de la table de 4) et n'ont pas répondu pour 22 × 0,25 car 22 n'est pas divisible par 4, et que la procédure « diviser par 4, c'est prendre la moitié de la moitié » n'est pas disponible ou pose des problèmes dans les calculs de moitiés.

Il est intéressant d'analyser en même temps les résultats à l'item suivant :

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

5 × 0,25 =

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
1,25	50,5 %	12,7 %	3

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
5 n'est pas divisible par 4. D'après ce qui vient d'être dit, on pourrait s'attendre à un taux de réussite et à un taux de non-réponse comparables à ceux de 22 × 0,25. Pourtant, ce n'est pas le cas, la

variation est même inversée, puisque c'est l'item qui est le mieux réussi et celui où il y a le moins de non-réponses.

$5 \times 0{,}25$ ou 5/4 peut être connu comme un fait numérique, mais cela nous paraît peu probable vue la maîtrise des autres faits numériques mobilisés dans l'évaluation *Cedre*.
La procédure « prendre la moitié de la moitié » revient à calculer la moitié de 5 (qui peut être considéré comme un fait numérique) puis la moitié de 2,5, ce dernier calcul paraissant plus compliqué que la moitié de 11.

Il est donc raisonnable de penser que le fort taux de réussite vient du fait que la procédure la plus utilisée pour ce calcul $5 \times 0{,}25$ est celle du calcul posé, qu'il est possible de réaliser ici en moins de 30 secondes, sur le brouillon ou mentalement, en posant $0{,}25 \times 5$ et en utilisant la table de 5 (fait numérique).

Notons néanmoins qu'il y a tout de même 37 % d'échec dans ce calcul, sans qu'une erreur majoritaire puisse se dégager.

Une remarque portant sur les trois items : environ 3 % des élèves effectuent une addition au lieu d'une multiplication. Ce qu'il est intéressant de noter pour $22 \times 0{,}25$, c'est que la plupart des erreurs produisent des résultats entiers : 5 ; 10 ; 11 ; 12 ; 15 ; 20 ; 22 ; 50. La maîtrise des opérations avec les décimaux semble insuffisante.

$12 \times 0{,}25 \rightarrow$ groupe 4.
$22 \times 0{,}25 \rightarrow$ groupe 5.
$5 \times 0{,}25 \rightarrow$ groupe 3.

Il est possible de calculer les taux de réussite à ces items pour chaque groupe d'élèves. A partir de ces résultats, on observe que la connaissance du fait numérique mobilisable ici ne semble acquise majoritairement qu'à partir du groupe 4, et ceci de façon marquée car le groupe 3 n'est en réussite que de 35 % sur $12 \times 0{,}25$ et de 18,5 % sur $22 \times 0{,}25$, et lorsqu'elle est cumulée à une autre difficulté (22 non divisible par 4), le groupe 4 n'est en réussite que de 33 %.

Exemple sur la division

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

130 ÷ 5 =

Modalités de passation : Sans calculatrice - Temps de réponse limité à 30 secondes			
Réponse attendue	Taux de réussite	Taux de non-réponse	Groupe CEDRE 2019
26	23,6 %	38,9 %	Hors échelle

Source : MENJ-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : Élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Analyse :
Environ 4 élèves sur 10 ne proposent aucune réponse : serait-ce dû au fait que l'opération en jeu est une division ?

On remarque une grande diversité des résultats. Néanmoins, les erreurs les plus fréquentes sont 25 (4 %) puis 15 et 30 (3 %) et enfin 60 (2,5 %).

Peut-être certains élèves s'appuient-ils sur les ordres de grandeur (les résultats erronés entre 20 et 30 représentent 8 % des élèves) ?

La décomposition de 130 en 100 + 30 permet de mener ce calcul sans poser :

$$(100 + 30) \div 5 = 100 \div 5 + 30 \div 5$$

Ce calcul repose sur la connaissance de la distributivité étendue à la division, ce qui est licite puisque « diviser, c'est multiplier par l'inverse », mais manifestement cette procédure est essentiellement inconnue des élèves. Une autre procédure peut être mobilisée si elle est connue : diviser par 5, c'est diviser par 10 puis multiplier par 2. Enfin, il semble que la technique de calcul posée ne soit que rarement un recours possible, en tous cas dans le temps limité de 30 secondes.

Ce calcul de cycle 3 semble donc laisser les élèves démunis, sans notamment le réflexe de revenir au sens de la division comme situation de partage.

↘ Bibliographie

[1] Éducation nationale - DEPP, «NOTE D'INFORMATION n° 20.34 : Cedre 2008-2014-2019 Mathématiques en fin de collège : des résultats en baisse,» Septembre 2020. [En ligne]. Available: https://www.education.gouv.fr/cedre-2008-2014-2019-mathematiques-en-fin-de-college-des-resultats-en-baisse-306338.

[2] Éducation nationale, «Au BO spécial du 26 novembre 2015 : programmes d'enseignement de l'école élémentaire et du collège,» 26 Novembre 2015. [En ligne]. Available: https://www.education.gouv.fr/au-bo-special-du-26-novembre-2015-programmes-d-enseignement-de-l-ecole-elementaire-et-du-college-3737.

[3] Éducation nationale, «Programmes d'enseignement de l'école élémentaire et du collège - Bulletin officiel du 26 juillet 2018,» 26 Juillet 2018. [En ligne]. Available: https://www.education.gouv.fr/francais-mathematiques-emc-des-programmes-plus-clairs-et-plus-precis-du-cp-la-3e-la-rentree-2018-11690.

[4] C. Piolti-Lamorthe et S. Roubin, «Le calcul réfléchi : entre sens et technique,» *Le Bulletin Vert de l'APMEP*, n° %1488, pp. 272-280.

[5] Éducation nationale, «Le calcul aux cycles 2 et 3,» Mars 2016. [En ligne]. Available: https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Nombres_et_calculs/99/2/RA16_C2C3_MATH_math_calc_c2c3_N.D_600992.pdf.

[6] Éducation nationale, «Le calcul en ligne au cycle 3,» Mars 2016. [En ligne]. Available: https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Nombres_et_calculs/00/2/RA_16_C3_MATH_calcul_ligne_c3_N.D_601002.pdf.

[7] Éducation nationale, «Calculer au cycle 4,» Mars 2016. [En ligne]. Available: https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/37/0/RA16_C4_MATH_comp_calculer_554370.pdf.

[8] Éducation nationale - Dgesco, «Document d'accompagnement - Le calcul mental,» 2002. [En ligne]. Available: https://www.arpeme.fr/documents/7D218B44152B38CD292C.pdf.

[9] Éducation nationale, «Automatismes en 2nde et 1ère au lycée général et technologique,» Août 2019. [En ligne]. Available: https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/84/2/RA19_Lycee_GT_2-1_MATH_Automatismes_1163842.pdf.

Publications et archives

Retrouvez toutes les publications et archives de la DEPP sur

archives-statistiques-depp.education.gouv.fr

Jeux de données en open data

Retrouvez tous les jeux de données de la DEPP

en open data sur

data.education.gouv.fr

Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse
Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP)