MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE :

Objectifs de formation

I. OBJECTIFS GÉNÉRAUX DE LA FORMATION

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent enfin certains points de terminologie. Toutefois chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes.

Comme rien ne nuit plus à l'esprit critique que les connaissances superficielles, le parti retenu par ces programmes est plutôt celui du « peu et bien » que d'une surcharge excessive qui entrainerait certains étudiants à faire semblant d'avoir compris.

On a voulu maintenir un volume global raisonnable : les limites du programme sont clairement précisées. Il convient de souligner les nécessités impérieuses de les respecter, aussi bien au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation. Il faut se garder de donner cours à toute ambition théorique concernant les points du programme précisés comme de premières approches. Les commentaires du programme permettent de dégager les objectifs essentiels, indiquent les résultats admis sans démonstration et comportent des mises en garde afin d'éviter des sujets trop théoriques ou présentant une technicité excessive.

II. ARCHITECTURE ET CONTENUS DES PROGRAMMES

Le programme de mathématiques des classes préparatoires économiques et commerciales est organisé sur deux années. Il fait suite à celui du baccalauréat et précède des enseignements spécialisés de calcul économique et de calcul de gestion. C'est dire qu'il prolonge les programmes de l'enseignement secondaire dans un même esprit de rigueur, en choisissant ses points forts dans l'orientation visée ; il ne s'agit donc ni d'un recueil de recettes utiles ni d'un cours sur des fondements de mathématiques générales.

Les mathématiques jouent un rôle important dans les sciences de l'économie et de la gestion, rôle encore renforcé par le développement de la micro-informatique. Le raisonnement sur les faits économiques s'accommodant mal de la structure des entiers, la démarche consiste à conceptualiser un phénomène en passant du discret au continu, puis à développer des algorithmes et des programmes informatiques qui ramènent le continu au discret. Ainsi en est-il de l'analyse des données statistiques, du contrôle du traitement et du mouvement des marchandises, de l'analyse des risques financiers et de la gestion des fichiers d'ordinateurs, tous domaines faisant appel à des méthodes de calcul élaborées.

L'orientation du programme vers les sciences de l'économie et de la gestion s'organise autour de cinq points forts :

- En algèbre linéaire, la méthode du pivot de Gauss, l'exploitation des structures euclidiennes, notamment pour les problèmes de moindres carrés, la réduction des matrices carrées (matrices stochastiques, matrices de covariance, étude d'extremums,...) ;
- en analyse, la mise en évidence des relations entre les phénomènes discrets, décrits par des suites, et les phénomènes continus, décrits par des fonctions, l'emploi de représentations graphiques pour l'étude qualitative et quantitative de ces phénomènes, la recherche d'extremums en liaison avec des problèmes simples d'optimisation, et la maîtrise des fonctions usuelles, notamment les fonctions exponentielles ;

- en probabilités et en statistique, la consolidation des acquis de enseignement secondaire, l'initiation aux phénomènes aléatoires, notamment l'emploi des lois usuelles, et une première approche du lien entre le modèle probabiliste et les séries statistiques ;
- une valorisation des aspects numériques et graphiques dans l'ensemble du programme ;
- en relation avec le programme d'infonnatique, l'étude de quelques algorithmes numériques (recherche et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leurs performances).

Ces cinq points forts trouveront leurs prolongements dans la scolarité des écoles : analyse des données multidimensionnelles, programmation linéaire, optimisation, modèles économiques et financiers, processus aléatoires, informatique.

III. UTILISATION DES TICE

L'emploi des calculatrices est défini par la réglementation en vigueur. Les étudiants doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme de la classe considérée. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :

- Savoir effectuer des opérations arithmétiques sur les nombres réels et savoir comparer deux nombres réels ;
- savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme de la classe considérée et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches ;
- savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

Les notions d'algorithmique et de programmation figurant au programme d'infonnatique peuvent intervenir dans les épreuves écrites ou orales de mathématiques. Lors des épreuves écrites, les étudiants peuvent rédiger des algorithmes, soit en français, soit en Pascal (tout autre langage de programmation est exclu) ; l'énoncé peut imposer qu'un programme (ou certaines de ses procédures) soit rédigé en Pascal. Toute rédaction de programmes relatifs à l'algèbre linéaire est exclue. L'étude des algorithmes ne porte que sur des exemples ; toute théorie générale des algorithmes est hors programme.

Voie économique : deuxième année

I – Algèbre linéaire

L'objectif de ce chapitre est de présenter une étude élémentaire des espaces vectoriels en dimension finie sur $\mathbf{R}$ *et d'exploiter les résultats obtenus pour approfondir les acquis de première année concernant le calcul matriciel.*

A. CALCUL VECTORIEL, CALCUL MATRICIEL

1) Espaces vectoriels réels

a) Espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Sous-espaces vectoriels.

On illustrera ces définitions avec les espaces vectoriels de référence suivants : $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}_n[X]$, $\mathbf{R}[X]$, l'ensemble des applications d'un ensemble D dans $\mathbf{R}$, l'ensemble des suites réelles $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

b) Application linéaire, noyau, image.
Endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.
Composée de deux applications linéaires.
Application réciproque d'un isomorphisme.
Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E. Ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E.

c) Combinaisons linéaires.
Familles libres, familles génératrices, bases.
Base canonique de $\mathbf{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}_n[X]$.

d) Si un espace vectoriel admet une base constituée de n vecteurs, toute autre base a n vecteurs.
Notion de dimension.

Théorème admis.

Théorème de la base incomplète.
Une famille libre (resp. génératrice) à n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n est une base.

Ces résultats pourront être admis.

Dimension d'un sous-espace vectoriel.

2) Applications linéaires et matrices

Les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

a) Rang d'une application linéaire.
Théorème du rang.
Application à la caractérisation des isomorphismes.

Résultat admis.

b) Matrice associée à une application linéaire dans des bases, matrice d'un endomorphisme.
Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$, entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ lorsque les bases sont fixées.

Lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires.
Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.

c) Changements de bases, matrice de passage. Effet du changement de base sur les composantes d'un vecteur, sur la matrice associée à un endomorphisme u de E.
Matrices semblables.

B. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARRÉES

Les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

1) Réduction des endomorphismes

a) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme de E. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre.
En particulier, si $\dim E = n$, un endomorphisme a au plus n valeurs propres.
Cas d'un endomorphisme vérifiant une équation polynomiale : si P est un polynôme annulateur de f, toute valeur propre de f est racine de ce polynôme.

Aucune autre connaissance sur les polynômes annulateurs n'est au programme.

b) Un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base formée de vecteurs propres.
Si $\dim E = n$, tout endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.
Dans un espace de dimension n, un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.

Ce résultat pourra être admis.

2) Réduction des matrices carrées

a) Valeurs propres, vecteurs-colonnes propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée.
Matrices diagonalisables, diagonalisation d'une matrice carrée.
Valeurs propres d'une matrice triangulaire.

Exemples d'emploi de changements de bases.
Exemples de diagonalisation de matrices carrées.
Exemples de calcul des puissances n-ièmes d'une matrice.

b) Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Résultat admis.

II – Compléments sur les suites et les séries

L'objectif est d'étudier plus précisément certaines situations, tout en consolidant les acquis de première année sur les suites et les séries.

1) Compléments sur les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Notion de point fixe d'une application.
Si (u_n) converge vers ℓ et si f continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.

Cette activité pourra être menée en liaison avec la partie algorithmique du programme.

2) Compléments sur les séries

- Lien entre la suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$
- Convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

On utilisera la comparaison avec des intégrales pour des problèmes d'encadrement.

- Séries à termes positifs.

Comparaison des séries à termes positifs dans les cas où $u_n \leqslant v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.

- Exemples d'étude de séries à termes quelconques.

On utilisera la notion de convergence absolue vue en première année.

III – Calcul intégral

L'objectif est d'une part de consolider et de compléter les acquis de première année concernant les intégrales sur un segment, d'autre part d'étudier de façon élémentaire les intégrales sur un intervalle quelconque dans le but d'étudier les variables aléatoires à densité en calcul des probabilités.

1) Compléments sur l'intégration sur un segment

Outre les points nouveaux examinés, on reviendra au travers de nombreux exercices sur les techniques et les propriétés vues en première année. En particulier on insistera sur l'utilisation de la positivité de l'intégrale et sur l'utilisation de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

a) Méthode des rectangles.

Si f est continue sur $[a,b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(a+j\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Le résultat général est admis.
On pourra le démontrer en exercice si f est de classe C^1 sur $[a,b]$.
En liaison avec l'algorithmique, application au calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

b) Fonctions continues par morceaux.
Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et propriétés.

c) Formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral pour une fonction de classe C^{p+1}. Majoration du reste, inégalité de Taylor-Lagrange. Applications à l'obtention de majorations et d'encadrements.

d) Définition des développements limités.
Développements limités des fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, binôme).
Utilisation du développement limité d'ordre 2 (au moins) pour la détermination de la tangente et la position de la courbe par rapport à la tangente en x_0.
Utilisation d'un développement limité pour la détermination d'asymptotes en $+\infty$ ou en $-\infty$.

La recherche de développements limités est un outil pour l'étude locale des fonctions ; elle ne constitue pas une fin en soi, et on se gardera de tout excès de technicité dans ce domaine.

2) Intégrales sur un intervalle de type $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$

a) Convergence des intégrales

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f est continue (ou continue par morceaux) sur $[a,+\infty[$.

Extension aux intégrales

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On étudiera notamment la convergence des intégrales

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \quad (a>0).$$

Les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables) seront pratiquées sur des intégrales sur un segment. Par contre, les changements de variables affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque.

b) Cas des fonctions positives, règles de comparaisons dans les cas $f \leqslant g$, $f = o(g)$ et $f \sim g$.

c) Convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence.

Ce résultat pourra être admis.

d) Comparaison d'une série à termes positifs et d'une intégrale.
Si f est une fonction continue positive décroissante sur $[1,+\infty[$ alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ sont de même nature.

3) Intégrales sur un intervalle de type $[a,b[$ ou $]a,b]$

a) Définition de la convergence de

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

où f est continue (ou continue par morceaux) sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) et $\lim\limits_{x\to b} f(t) = \pm\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to a} f(t) = \pm\infty$).

On étudiera notamment la convergence des intégrales

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\beta}.$$

b) Cas des fonctions positives : règles de comparaison dans les cas $f \sim g$, $f \leqslant g$ et $f = o(g)$.

Résultats admis. Aucun autre résultat n'est exigible pour ces intégrales.

IV – Fonctions numériques de deux variables réelles

L'objectif est d'arriver à une bonne maîtrise des problèmes d'extremums des fonctions de deux variables à partir d'un minimum d'outils théoriques.

1) Fonctions continues sur une partie de $\mathbf{R}^2$

a) Distance euclidienne de deux points de $\mathbf{R}^2$.
Boules ; parties ouvertes, fermées, bornées.

Ces notions sont introduites uniquement en vue de l'étude des fonctions, la nature topologique des ensembles devra toujours être précisée aux candidats.

b) Limite et continuité d'une application d'une partie de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.

Aucune difficulté théorique ne sera soulevée sur ces notions.

Opérations sur les fonctions continues.

Les applications $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbf{R}^2$.
On admettra que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de deux fonctions continues est continue.
On admettra que la composée d'une fonction continue par une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue est continue

Une fonction continue sur une partie fermée bornée admet un maximum et un minimum.

Résultat admis.

2) Calcul différentiel

Les fonctions sont désormais supposées définies sur des ouverts de $\mathbf{R}^2$.

a) Dérivées partielles d'ordre 1 ; fonctions de classe C^1.
Opérations sur les fonctions de classe C^1.

Les étudiants doivent connaître les notations usuelles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, f'_x, f'_y.
La détermination de la classe d'une fonction en un point problématique est hors programme.

Développement limité d'ordre 1 d'une fonction de classe C^1

Résultat admis.
En vue des applications aux sciences économiques, on donnera la notation différentielle, mais la notion de différentielle est hors programme.

b) Dérivées partielles d'ordre 2, fonctions de classe C^2. Opérations sur les fonctions de classe C^2.

Les étudiants doivent connaître les notations usuelles : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{xy}$.

Théorème de Schwarz. Développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe C^2.

Résultats admis.

c) Si une fonction de classe C^1 admet un extremum local en un point, ses dérivées partielles sont nulles en ce point.

Notion de point critique.

d) Condition suffisante d'extremum local pour une fonction de classe C^2.

Résultat admis.
On introduira les notations de Monge. On étudiera en particulier cette condition en un point a tel que $p = q = 0$ et $rt - s^2 > 0$. On admettra également que si $rt - s^2 < 0$, il n'y a pas d'extremum.
Application à la recherche d'extremums locaux.

V – Probabilités

L'objectif est double :
– d'une part, consolider les acquis de première année concernant les variables aléatoires discrètes, et enrichir le champ des problèmes étudiés, avec, en particulier, l'étude simultanée de variables aléatoires (couples ou suite de variables aléatoires discrètes) ;
– d'autre part, effectuer une étude élémentaire des lois usuelles, discrètes et à densité.
Enfin, on établira des liens entre certaines lois dans le cadre des approximations et des convergences ainsi que des liens entre statistique et probabilités dans le cadre de l'estimation.

1) Variables aléatoires discrètes : simulations informatiques

En liaison avec les activités informatiques, on établira des fonctions PASCAL pour simuler des variables aléatoires suivant les lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique.

Cette activité sera l'occasion de revoir les lois usuelles discrètes étudiées en première année.
On pourra étudier en exercice le problème plus délicat de la simulation d'une variable suivant une loi hypergéométrique.
On étudiera en exercice des simulations de variables aléatoires autres que celles considérées comme usuelles.

2) Couples de variables aléatoires discrètes

Ces activités seront l'occasion de revenir sur certains acquis du programme de première année afin de les consolider. On reviendra sur le cadre général (espace probabilisé). En particulier, on insistera sur l'utilisation de systèmes complets d'événements, sur le conditionnement et sur la formule des probabilités totales.
Concernant les objets utilisant des séries doubles, toutes les indications devront être données au candidat quant à l'existence et à la méthode de calcul de ces séries.

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes

Tous les résultats sont abordés lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, admis sinon.

Lois marginales, lois conditionnelles.
Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.

Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Z = g(X,Y)$ où g est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X,Y) de variables aléatoires.

Dans le cas général, on admet que
$E(g(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P([X = x \cap Y = y])$
(sous réserve d'existence).

Loi d'une somme, d'un produit de deux variables aléatoires discrètes.
Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson ou la loi binomiale.
Linéarité de l'espérance.

Sous réserve d'existence.

Variance de la somme de deux variables aléatoires.
Covariance.
Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Coefficient de corrélation linéaire, interprétation.

3) Suites de variables aléatoires discrètes

Indépendance de n variables aléatoires réelles discrètes.

$\forall(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n$,
$$P\left(\left[\bigcap_{i=1}^{n} X_i = x_i\right]\right) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i = x_i])$$

Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires réelles discrètes.
Si X_1, X_2 ,..., X_n, sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, ..., X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n.

Résultat admis.

Variance de la somme de n variables aléatoires.
Variance de la somme dans le cas de l'indépendance.

A titre d'exercice, on pourra calculer la variance dans le cas de la loi hypergéométrique.

4) Variables aléatoires à densité

a) Définition

On dit qu'une variable X à valeurs réelles admet f_X pour densité si sa fonction de répartition F_X peut s'écrire sous la forme :
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}\,t$$
où f_X est une fonction à valeurs positives, ayant un ensemble fini de discontinuités.
Réciproquement toute fonction f à valeurs positives, ayant un ensemble fini de discontinuités et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$ est une densité.

Résultat admis.

Caractérisation par la fonction de répartition.

Si F est une fonction définie et continue sur $\mathbf{R}$, croissante de 0 à 1, de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de points, alors c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X ; une densité de X est alors donnée par la dérivée de F aux points où elle existe.

Exemples simples de calcul de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable à densité.

Les candidats devront savoir retrouver les densités de $aX + b$ $(a \neq 0)$, X^2, $\exp(X)$, ...

b) Espérance d'une variable aléatoire à densité

Espérance ou moyenne (linéarité admise).
Variables centrées.

Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.

Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire de densité f, si g est continue sur $\mathbf{R}$ sauf un nombre fini de points, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance et

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Résultat admis.

Définition du moment d'ordre r ($r \in \mathbf{N}$).
Notation $m_r(X)$.

$m_r(X) = E(X^r)$.

Moments d'ordre 2, variance, écart-type, variables aléatoires centrées réduites.

Exemples de variables aléatoires n'admettant pas de variance.

c) Lois usuelles

Loi uniforme sur un intervalle, espérance, simulation informatique.
Loi exponentielle, caractérisation par l'absence de mémoire, espérance et variance.

On étudiera en exercice la simulation informatique d'une loi exponentielle en utilisant, par exemple, une variable aléatoire $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$, où Y suit une loi uniforme à densité sur l'intervalle $[0,1]$.

Loi normale centrée réduite, loi normale (ou de Laplace-Gauss) $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, espérance, variance.

On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

5) Convergences et approximations

a) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On justifiera l'inégalité dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

b) Loi faible des grands nombres pour une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance et une même variance.

La loi faible des grands nombres permet une justification partielle, a posteriori, de la notion de probabilité d'un événement introduite intuitivement.

c) Convergence en loi
Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires vers X.
Cas où les X_n prennent leurs valeurs dans $\mathbf{N}$.
Convergence d'une suite de variables alatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\lambda/n)$ vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson.

Théorème de la limite centrée : étant donné une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance et une variance, la variable centrée réduite S_n^* associée à

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, c'est à dire :

$$\lim_{n\to+\infty} P([a \leqslant S_n^* \leqslant b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}\,t$$

Résultat admis.
On utilisera ce résultat pour justifier l'approximation d'une loi binomiale et d'une loi de Poisson, dans certains cas, par une loi normale.

On étudiera en exercice le principe de la simulation informatique d'une loi normale en utilisant, par exemple, la variable aléatoire centrée réduite associée à $X = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$ où les Y_k sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi uniforme à densité sur $[0,1]$.

d) Approximations

Exemples d'approximation (cas de la loi hypergéométrique, de la loi binomiale, et de la loi de Poisson).

Toutes indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

6) Estimation

L'objectif est d'initier les candidats au vocabulaire et à la démarche de la statistique inférentielle sur quelques cas simples en présentant aux candidats le problème de l'estimation de la loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle X qui lui est liée. En général, la loi de probabilité de X n'est pas complètement spécifiée. Le plus souvent, on suppose que cette loi appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ réel qui appartient à un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}$.

Le problème de l'estimation consiste à estimer la vraie valeur du paramètre à partir d'un échantillon de données $x_1, ..., x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène. On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Les $X_1, \cdots, X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ.

a) Estimation ponctuelle.

n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de v.a.r. indépendantes et de même loi que X.

Par abus de notation, on notera $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance (si elles existent) de X.
Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ avec $\theta = p$.

Un estimateur de θ est une suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geqslant 1}$ où T_n est une fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
Par abus de langage on dit aussi que T_n est un estimateur de θ.

La réalisation de T_n doit être calculable à partir du seul échantillon observé $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Estimation de l'espérance d'une variable aléatoire.

Exemple d'estimateurs :
estimateur du paramètre p d'une loi de Bernoulli,
estimateur du paramètre λ d'une loi de Poisson.

On appelle biais de T_n la quantité $E_\theta(T_n) - \theta$. L'estimateur (T_n) de θ est sans biais si $E_\theta(T_n) = \theta$.

On appelle risque quadratique de T_n la quantité $E_\theta\left((T_n - \theta)^2\right)$.

$E_\theta\left((T_n - \theta)^2\right) = b^2 + V_\theta(T_n)$ où b désigne le biais de l'estimateur.

b) Intervalle de confiance

La démarche consiste non plus à donner une estimation ponctuelle de θ à partir d'un estimateur T_n mais à trouver un intervalle aléatoire, inclus dans Θ, appelé intervalle de confiance et qui a une forte probabilité de contenir θ.
Ce paragraphe a uniquement pour but de préciser le vocabulaire employé. Les situations seront étudiées sous forme d'exercices, aucune autre connaissance que ce vocabulaire n'est exigée sur les intervalles de confiance.

Soient U_n et V_n deux variables aléatoires, fonctions d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.
On dit que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1-\alpha$ si

$$P([U_n \leqslant \theta \leqslant V_n]) \geqslant 1-\alpha.$$

α est appelé le niveau de risque.

Comme pour T_n, les réalisations de U_n et V_n doivent être calculables à partir du seul échantillon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ observé.
Les bornes d'un intervalle de confiance sont donc des variables aléatoires dont on utilisera les réalisations pour encadrer avec une confiance d'au moins $1-\alpha$ la valeur à estimer.

VI – Éléments d'algorithmique

L'objectif est double :
– d'une part, consolider les acquis de première année concernant l'utilisation du langage PASCAL, notamment dans l'utilisation de fonctions et de procédures ;
– d'autre part, enrichir le champ des algorithmes rencontrés par l'étude de listes (en fait, ici, des tableaux à une dimension) et des situations aléatoires plus complexes.

L'environnement Pascal

a) Procédures et fonctions
Déclaration de procédures et de fonctions, structure, passage de paramètres par valeur et par adresse. Notion de variables locales et globales.
b) Procédures et fonctions récursives.
Principe et utilisation.

Listes des savoir-faire supplémentaires exigibles en deuxième année

Écrire (ou comprendre) des outils de calcul élémentaires utilisant des algorithmes itératifs ou récursifs. Déterminer le nombre d'opérations élémentaires effectuées dans l'exécution de ces algorithmes.

On pourra tirer les exemples d'algorithmes mathématiques déjà étudiés en première année :
n^p, $n!$, $\binom{n}{p}$, suites récurrentes ...
On écrira ces outils sous forme de fonctions Pascal.
On montrera le piège des appels récursifs multiples.

Écrire ou comprendre des outils de calculs issus du cours d'analyse :
- calcul approché de la valeur d'une intégrale
- calculs utilisant les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Écrire des fonctions PASCAL, utilisant le générateur aléatoire du PASCAL, simulant des variables aléatoires suivant les lois suivantes :
loi uniforme sur $[\![n_1, n_2]\!]$, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi uniforme à densité sur $[a, b]$.

On pourra étudier en exercice la simulation de la loi hypergéométrique (un algorithme récursif permet une écriture simple).

Utiliser les outils précédents, ou des algorithmes directs, pour écrire des fonctions PASCAL simulant des variables aléatoires plus difficiles à étudier.

Exemples : somme de n variables indépendantes suivant une loi uniforme, variable définie par un conditionnement, somme de variables non indépendantes, maximum de plusieurs variables...

Utiliser ces modèles pour réaliser l'estimation de paramètres de phénomènes aléatoires.

Estimation de l'espérance d'une variable aléatoire.

Écrire ou comprendre des outils élémentaires de gestion de listes définies par un tableau à une dimension.
On étudiera en particulier :
- la recherche de la valeur et du rang des extremums de cette liste,
- la recherche dichotomique d'un élément dans une liste ordonnée.