# Annexe I

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ANNÉE

# PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE LA CLASSE TECHNOLOGIE - BIOLOGIE

## Première année

## I. – Nombres complexes et trigonométrie.

*Les nombres complexes sont introduits dans ce programme en raison de leur importance dans tous les domaines des mathématiques, en particulier en analyse. De nombreuses modélisations les utilisent.*
*On s'appuiera largement sur la notion de plan complexe et les images géométriques correspondantes.*
*Cependant l'introduction des nombres complexes dans ce programme n'a pas pour objectif la résolution de problèmes purement géométriques.*

a) Nombres complexes. Représentation géométrique d'un nombre complexe; nombres complexes conjugués; affixe d'un point, d'un vecteur.

La construction théorique du corps des complexes est hors programme.

Les illustrations géométriques ont pour seul objectif l'aide à l'acquisition de ces connaissances.

b) Module d'un nombre complexe : module d'un produit, inégalité triangulaire.
- Nombres complexes de module 1; argument d'un nombre complexe non nul, notation $e^{i\theta}$.

L'étude des racines n-ièmes d'un nombre complexe, y compris les racines n-ièmes de l'unité, est hors programme.

- Relation $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}.e^{i\theta'}$, lien avec les formules de trigonométrie; formule de Moivre; formules d'Euler:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right);$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right).$$

Ces formules devront être étudiées assez tôt dans l'année pour être utilisées dans les autres disciplines.

- Définition de $e^z$ pour $z$ complexe, formule $e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$.
- Dérivation de $x \mapsto e^{mx}$, où $m$ est complexe et $x$ réel.

### Travaux dirigés

Résolution des équations du second degré à coefficients réels. Somme et produit des racines.
La résolution des équations du second degré à coefficients complexes est hors programme.
Transformation de $a\cos\theta + b\sin\theta$, où $a$ et $b$ sont des réels, en $r\cos(\theta+\varphi)$.
Exemples de mise en œuvre des formules de Moivre et d'Euler: linéarisation de polynômes trigonométriques, conversion de sommes en produits

Des polynômes très simples à coefficients complexes pourront intervenir à l'occasion de l'étude de certaines équations différentielles.

## II - Géométrie

*Cette partie est étudiée pour son utilisation en sciences physiques et en probabilités.*

*Elle servira également de support intuitif en algèbre linéaire :*
On pourra, dans cette partie, introduire et illustrer le vocabulaire qui sera utilisé par la suite en algèbre linéaire :
- la dépendance ou indépendance linéaire d'une famille finie de vecteurs étant vue à travers la colinéarité de deux vecteurs dans le plan, puis étendue dans l'espace.
- la notion de famille génératrice finie de vecteurs étant vue à travers la décomposition de tout vecteur du plan ( respectivement de l'espace ) suivant au moins deux vecteurs du plan ( ou trois vecteurs de l'espace ), dont deux ( respectivement trois ) sont linéairement indépendants.

*On se placera dans le plan et l'espace " naïfs ", et on ne cherchera pas à en donner une construction théorique*

| | |
|---|---|
| Bases, repères de la droite, du plan, de l'espace,<br>- d'une droite dans le plan,<br>- d'une droite, d'un plan dans l'espace.<br>Changements de repères. | |
| Produit scalaire de deux vecteurs, norme euclidienne d'un vecteur. | Les calculs qui suivent seront effectués dans des repères orthonormaux en dimension 3 au plus : le produit scalaire sera défini dans $IR^2$ par $\sum_{i=1}^{2} x_i x'_i$ et dans $IR^3$ par $\sum_{i=1}^{3} x_i x'_i$.<br>Les propriétés seront admises. |
| Equations et représentations paramétriques d'une droite dans le plan ou dans l'espace. | |
| Représentations paramétriques d'un plan dans l'espace. | On montrera que tout plan admet une équation du type $ax + by + cz + d = 0$,<br>puis on montrera que toute équation du type $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan de vecteur normal ( a, b, c ) ( $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ ). |
| Projection orthogonale d'un point sur une droite, sur un plan.<br>Distance d'un point à une droite, à un plan. | Interprétation géométrique du produit scalaire. |

### Travaux dirigés
Exemples d'études :
- des positions relatives de droites, de droites et de plans,
- de situations d'orthogonalité,
- de projections (orthogonales ou non),
- des équations d'un cercle dans le plan, d'une sphère dans l'espace,
toute étude générale étant exclue.

# III - Algèbre linéaire

*En 1ère année, on n'étudiera que les espaces vectoriels $IR^n$ sur IR, où n est inférieur ou égal à 4.*
*Des illustrations, notamment à l'aide de figures, seront données en dimension 2 et en dimension 3 en lien avec la partie II.*

**A. Systèmes d'équations linéaires**

Opérations élémentaires sur les lignes : elles transforment le système en un système équivalent.

Un système linéaire a zéro, une unique ou une infinité de solutions.
Rang d'un système linéaire.

On fera le lien avec l'étude, en géométrie, de la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.

Système de Cramer

**B. Matrices à coefficients dans IR**

Matrices, matrices lignes, colonnes, carrées, triangulaires, diagonales.
Matrice nulle, matrice unité (identité).

Opérations sur les matrices :
addition, multiplication par un scalaire (réel)
produit
transposition.

Ecriture matricielle d'un système d'équations linéaires.

Matrices carrées :
matrice diagonale, matrice triangulaire
matrice inversible, matrice inverse : recherche pratique de l'inverse d'une matrice par la résolution d'un système de Cramer.

Les justifications théoriques, relatives à l'algèbre linéaire, seront données ultérieurement au titre **D.**

**C. Espace vectoriel $IR^n$ ( $n \leq 4$ )**

Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs de $IR^n$.
Sous-espaces vectoriels de $IR^n$
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs
Intersection de sous-espaces vectoriels de $IR^n$.
Somme de deux sous-espaces vectoriels de $IR^n$.

On énoncera les propriétés qui donnent à $IR^n$ une structure d'espace vectoriel sur IR.

Familles finies de vecteurs de $IR^n$ :
- familles génératrices d'un sous-espace vectoriel de $IR^n$.
- dépendance, indépendance linéaire d'un nombre fini de vecteurs.

| | |
|---|---|
| Bases et dimension d'un sous espace vectoriel, composantes d'un vecteur dans une base, matrice colonne des composantes d'un vecteur dans une base.<br>Base canonique de $IR^n$.<br>Rang d'une famille finie de vecteurs. | On admettra le résultat : toutes les bases d'un espace vectoriel ont le même nombre de vecteurs. |
| Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.<br>Sous-espaces vectoriels supplémentaires de $IR^n$.<br>Tout sous-espace vectoriel de $IR^n$ admet un sous espace vectoriel supplémentaire. | Résultat admis. |

**D. Applications linéaires de $IR^p$ dans $IR^n$**

| | |
|---|---|
| Applications linéaires<br>Opérations : addition, multiplication par un scalaire (réel), composition.<br>Noyau, ensemble image, rang d'une application linéaire.<br>Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs de la base canonique. | On fera le lien avec les notions d'injection, de surjection et de bijection.<br><br>L'application linéaire associée à une matrice est utilisée sans justification théorique. |
| Matrice d'une application linéaire dans les bases canoniques.<br>Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire (réel) d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application linéaire réciproque. | |

## Travaux dirigés

| | |
|---|---|
| Résolution d'un système d'équations linéaires à coefficients numériques par l'algorithme de Gauss. | |
| Etude de l'inversibilité d'une matrice.<br>Détermination de l'inverse d'une matrice. | La méthode utilisant la résolution d'un système d'équations linéaires est exigible. |

# IV - ANALYSE

Le but de cette rubrique est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les fonctions numériques et en particulier sur les suites. On envisagera des fonctions suffisamment régulières et on évitera toute surenchère au niveau des hypothèses.

## I. <u>**FONCTIONS ET APPLICATIONS**</u>

### A) <u>GÉNÉRALITÉS</u>

Notion générale de fonction d'un ensemble E dans un ensemble F.
Application, injection, surjection et bijection.
Composition des fonctions.
Image d'une partie, image réciproque.

On insistera sur la nécessité d'un concept général en envisageant des exemples variés issus de différents domaines.

### B) <u>FONCTIONS NUMÉRIQUES</u>

*a) Définitions*

Somme, produit et quotient.
Comparaison de fonctions numériques.
Majorant, minorant.
Monotonie.
Maximum et minimum.
Centre de symétrie, axe de symétrie.
Fonction périodique.
Représentation graphique de l'application réciproque $f^{-1}$.

On utilisera ce paragraphe pour rappeler les techniques de base du calcul numérique.

*b) Limites*

Limite d'une fonction en un point.
Limite à droite, limite à gauche.
Limite en $-\infty$, limite en $+\infty$.

La définition d'une limite par $(\varepsilon, \alpha)$ doit être donnée en rapport avec le comportement graphique.
On insistera sur le caractère local de la notion.
On se limitera à des exemples simples.

Théorèmes de comparaison.
Limites et relation d'ordre.
Opérations sur les limites.

On pourra faire une ou deux démonstrations, les autres étant admises.

*c) Continuité*

Continuité en un point.
Continuité à droite et à gauche.
Prolongement par continuité.
Opérations et composition.
Continuité sur un intervalle.

*d) Dérivée*

Nombre dérivé en un point.
Interprétation graphique, équation de la tangente à une courbe.
Nombre dérivé à droite, nombre dérivé à gauche.

Dans ce paragraphe on se limitera à des exemples simples.

Tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Notion de développement limité à l'ordre 1 en un point.

Notion d'approximation locale par une fonction affine, interprétation graphique.
Approximation des fonctions usuelles en zéro.

Nombre dérivé et opérations :
linéarité, produit, quotient et fonction composée.

Fonction dérivée.
Fonction dérivée et opérations :
linéarité, produit, quotient et fonction composée.

Notations : f' et df/dx.

Dérivée $n^{\text{ième}}$.

Notations : $f^{(n)}$ et $d^nf/dx^n$.

*e) Continuité sur un intervalle*

Les résultats de ce paragraphe seront admis.

Image d'un intervalle par une fonction continue.
Théorème des valeurs intermédiaires.
Image d'un segment par une fonction continue sur ce segment.

Une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur f (I).
Propriétés de l'application réciproque.
Dérivée de l'application réciproque $f^{-1}$.

*f) Théorème de Rolle et applications*

Théorème de Rolle.
Théorème des accroissements finis.

La démonstration n'est pas exigible.
L'inégalité des accroissements finis n'est pas exigible des étudiants, celle-ci pouvant être trouvée à partir du théorème.

Application à l'étude de la monotonie d'une fonction dérivable sur un intervalle.

Théorèmes sur la limite d'une dérivée.

Les théorèmes seront admis ; on donnera des exemples illustrant les différents comportements possibles.

*g) Représentation graphique*

Construction d'une courbe plane définie par y = f (x).
Étude des branches infinies.
Recherche de droites asymptotes.

**Travaux dirigés**

Fonctions définies par intervalles, fonction partie entière.

Fonctions polynômes :
Trinôme du second degré.
Opérations sur les polynômes, relations entre les coefficients et les dérivées successives, égalité de deux fonctions polynômes, racine simple, racine multiple, factorisation par (x-a).
Fonction sinus, cosinus et tangente.
Fonction Arcsin, Arccos et Arctan.

Équations trigonométriques.
Étude de fonctions.
Recherche d'extremums.
Exemples de lectures graphiques de propriétés d'une fonction à partir de sa courbe représentative.

## II. SUITES RÉELLES

*a) Principe de la démonstration par récurrence*

On illustrera ce principe par des exemples issus de différents domaines.

Les démonstrations par récurrence pourront être introduites hors du contexte des suites.

*b) Généralités*

Définition.

Suite définie par récurrence.
Représentation graphique des termes d'une suite définie par récurrence.

Somme, produit et quotient.
Suites majorées, suites minorées.
Monotonie (caractérisation propre aux suites).

Les propriétés des suites seront à relier à celles vues pour les fonctions.

*c) Limites*

Suite convergente, suite divergente vers $-\infty$ et $+\infty$.
Suite divergente.
Théorèmes de comparaison.
Limites et relation d'ordre.
Opérations sur les limites.

Les propriétés des suites seront à relier à celles vues pour les fonctions.

Existence d'une limite finie ou infinie pour les suites monotones.

Résultat admis.

Théorème des suites adjacentes.

Ce théorème sera démontré.

**Travaux dirigés**

Suites arithmétiques et géométriques, somme des n premiers termes de telles suites.
Suites arithmético-géométriques.
Exemples d'études de suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Exemples de méthodes numériques de résolutions d'équations.

## III. CALCUL INTÉGRAL

*a) Primitives*

Définition.

Pour une fonction continue et positive et en admettant l'existence et les propriétés de la notion intuitive d'aire, on établira le lien entre aire et primitive.

Existence d'une primitive sur un intervalle pour une fonction continue.

Résultat admis.

Caractérisation des primitives sur un intervalle pour une fonction continue.

Calcul des primitives.
(Linéarité, composition, primitives de $u'u^{\alpha}$ où $\alpha$ est un réel).

*b) Intégrale*

Définition de l'intégrale de a à b d'une fonction f continue sur un intervalle I contenant a et b :
$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

L'intégrale de f positive est l'aire sous la courbe. Extension de cette interprétation au cas d'une fonction de signe non constant.

On se limitera à des fonctions continues sur un intervalle s'annulant en un nombre fini de points.

Propriétés élémentaires :
relation de Chasles,
linéarité, positivité,
intégrale et relation d'ordre,
majoration de la valeur absolue d'une intégrale.

Si f est continue sur un intervalle I et si a est un élément de I alors la fonction F définie sur I par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Valeur moyenne d'une fonction.
Pour une fonction f continue on a :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Ce résultat est admis ; on en donnera une interprétation graphique et on fera le lien avec la méthode des rectangles.

*c) Procédés d'intégration*

Intégration par parties.
Intégration par changement de variable.

**Travaux dirigés**

Définition et étude de la fonction logarithme, propriétés algébriques.
Étude de la fonction exponentielle.
Fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \log_a(x)$.
Fonctions puissances.
Théorème des puissances comparées.
Étude de suites définies à l'aide d'intégrales.
Exemples d'intégration de fonctions rationnelles en donnant toutes les indications nécessaires.
Exemples de méthodes numériques de calcul d'intégrales : rectangles, trapèzes.

## IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

*a) Équations différentielles linéaires du premier ordre*

Équations à coefficients constants :

équations du type : $y' + a\,y = 0$
où a est un nombre complexe.

équations du type : $y' + a\,y = f(x)$
où a est un réel et f est du type :

$x \mapsto e^{\lambda x}$

ou $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

$A, B, \lambda$ et $\omega$ étant des réels.

On ne soulèvera aucune difficulté théorique concernant les fonctions de variable réelle à valeurs complexes

*b) Équations différentielles linéaires du second ordre*

Équations du type : $y'' + ay' + by = 0$
où a et b sont des complexes.

Équations du type : $y'' + ay' + by = f(x)$
où a et b sont des réels et f est du type suivant :

$x \mapsto e^{\lambda x}$

où $\lambda$ est un complexe.

**Travaux dirigés**

Passage dans le champ complexe pour la résolution d’équations différentielles pour des fonctions à valeurs réelles.
Exemples issus de modèles relevant de la physique, de la chimie et de la biologie.

# V - PROBABILITÉS

Cette rubrique a pour but d'introduire le vocabulaire et les méthodes de base du calcul des probabilités. Les différentes notions seront illustrées par des exemples issus des jeux, de la vie courante et des sciences.

## I. VOCABULAIRE DE BASE

Élément, appartenance.
Inclusion, complémentaire.
Intersection, réunion.

Ces notions, qui pourront avoir été abordées dans d'autres rubriques (par exemple lors des généralités sur les fonctions numériques), devront faire l'objet d'un développement modeste.
Elles ne pourront constituer le thème principal d'aucune question d'écrit ou d'oral.

Produit cartésien de n ensembles.

## II DÉNOMBREMENT

Cardinal d'un ensemble fini.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini.

On évitera tout excès de formalisation dans les démonstrations.

Cardinal de la réunion de deux ensembles finis.

Cardinal du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles finis.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini, notion de n-uplet.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Dénombrement des arrangements p à p de n éléments.
Dénombrement des permutations de n éléments.

Dénombrement des parties à p éléments d'un ensemble fini de cardinal n, combinaisons p à p de n éléments.
Formule du binôme.

### Travaux dirigés

On donnera des exemples nombreux et variés en insistant sur l'idée de modélisation.

## III. CONCEPTS DE BASE DES PROBABILITÉS

*a) Vocabulaire*

Épreuve ( expérience aléatoire ).
Univers.
Notion d'événement.
Événement certain, impossible.
Événement élémentaire.
Événements incompatibles, complémentaires.
Système complet d'événements.

En première année on se limitera au cas où l'univers est fini et où l'algèbre des événements est égale à l'ensemble des parties de l'univers.

*b) Probabilité*

Définition.
Espace probabilisé.
Propriétés.
Formule de Poincaré.

Résultat admis.

Dans le cas d'un univers fini, caractérisation d'une probabilité par la donnée des probabilités des événements élémentaires.

Résultat admis.

Cas de l'équiprobabilité ;
( cas favorables, cas possibles )

*c) Probabilités conditionnelles*

Définition.
Notations : $P(A / B)$ et $P_B(A)$.
Propriétés.

On fera observer que $P_B$ correspond à une probabilité sur un autre espace mais aucune théorie n'est à construire.

Théorème des probabilités composées.

Théorème des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i)\, P(B / A_i).$$

Théorème de Bayes.

Indépendance de deux événements.

Événements mutuellement indépendants.

Probabilité sur un univers produit.

On admettra l'existence ainsi que les propriétés d'une telle probabilité.

**Travaux dirigés**

On envisagera de nombreux exemples en insistant sur la modélisation choisie.

## IV. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

| | |
|---|---|
| Définition | On se limitera au cas où l'ensemble des valeurs prises est fini. |
| Loi de probabilité d'une variable discrète. | Diagramme en bâtons. |
| Fonction de répartition. | Représentation graphique.<br>On fera le lien avec les statistiques descriptives. |
| Espérance mathématique. | |
| Variance et écart-type. | |
| Théorème de Koenig - Huyghens. | |

**Travaux dirigés**

Exemples de lois de probabilité de variables aléatoires discrètes ; l'étude approfondie des lois usuelles sera faite en deuxième année.

DEUXIÈME ANNÉE

## I - Nombres complexes et trigonométrie

Exercices sur le programme de première année

## II - Géométrie

Exercices sur le programme de première année.

## III - Algèbre linéaire

Exercices sur le programme de première année.

*On reprendra les notions vues en première année et on les étendra à l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ *(* $n \geq 4$ *) sur* IR, *puis à tout espace vectoriel sur K, de dimension finie, sauf dans le dernier paragraphe, où le corps K, des scalaires, est* IR *ou* $\mathbb{C}$ .

*On donnera progressivement des exemples variés d'applications linéaires d'un espace vectoriel E, de dimension finie dans un espace vectoriel F, de dimension finie.*

*Une introduction très modeste des déterminants est proposée dans le but de simplifier le traitement des parties du programme : inversibilité d'une matrice, recherche des valeurs propres.*

### A. Espaces vectoriels de dimension finie

| | |
|---|---|
| Structure d'espace vectoriel.<br>Sous-espaces vectoriels.<br>Sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.<br>- intersection de sous-espaces vectoriels,<br>- somme de deux sous-espaces vectoriels.<br>Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.<br>Sous-espaces vectoriels supplémentaires. | Les espaces vectoriels suivants doivent être vus à titre d'exemples :<br>$K^n$,<br>$K_n[X]$ l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n,<br>$\mathcal{L}(E,F)$,<br>$\mathcal{M}_{n,p}(K)$ |
| Familles finies de vecteurs :<br>- familles génératrices d'un sous-espace vectoriel.<br>- dépendance, indépendance linéaire d'un nombre fini de vecteurs, | |
| Bases et dimension d'un sous espace vectoriel, composantes d'un vecteur dans une base. | Bases canoniques de $K^n$ et $K_n[X]$. |
| Rang d'une famille finie de vecteurs. | |

**B. Applications linéaires d'un espace vectoriel E, de dimension finie p dans un espace vectoriel F, de dimension finie n.**

Applications linéaires, endomorphismes
Opérations : addition, multiplication par un scalaire (réel), composition, réciproque.

Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}$ ( E , F ).

Noyau, ensemble image, rang d'une application linéaire.
Relation : dim Im f + dim Ker f = dim E

Relation admise

Caractérisation d'un isomorphisme : l'image d'une base de E est une base de F.

Matrice d'une application linéaire, une base ayant été choisie dans chacun des espaces vectoriels E et F.

On reprendra les notions vues en première année et on les étendra à toute matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel E, de dimension finie p dans un espace vectoriel F, de dimension finie n.
Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}$ (K).

Rang d'une application linéaire, d'une matrice, de la transposée (admis), rang d'un système.

Matrices de passage ou de changement de bases.
Effet d'un changement de base sur les composantes d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.

**C. Calculs de déterminants**

**Présentation du calcul d'un déterminant d'ordre 2 ou 3 :**

Déterminant de 2 (resp. 3) vecteurs écrits dans une base d'un espace vectoriel de dimension 2 (resp.3).

On présentera la méthode de développement selon une colonne, de préférence à des méthodes n'admettant pas de généralisation.

Utilisation comme critère de dépendance ou d'indépendance linéaire de deux vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 2 ou 3.
Caractérisation d'une base.

Ce résultat est admis pour un espace vectoriel de dimension 3.

Déterminant d'une matrice, caractérisation d'une matrice inversible.

**D. Valeurs propres et vecteurs propres**

| | |
|---|---|
| Valeurs propres d'une matrice carrée de dimension 2 ou 3. | On montrera que $\lambda$ est valeur propre de A si et seulement si le déterminant de $A-\lambda I$ est nul. |
| Valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace de dimension 2 ou 3. | L'invariance du déterminant de la matrice d'un endomorphisme par un changement de base est hors programme. Le polynôme caractéristique est hors programme. |
| Sous-espaces propres | Exemples élémentaires de diagonalisation. Aucun développement théorique n'est au programme. |

**E. L'espace vectoriel K [X]**

| | |
|---|---|
| Base canonique<br>Propriétés des polynômes vues comme propriétés dans K[X], en tant qu'espace vectoriel.<br>On donnera un exemple d'endomorphisme injectif et non surjectif et un exemple d'endomorphisme surjectif et non injectif. | Pour cet exemple d'espace vectoriel de dimension infinie, on ne fera pas de présentation théorique.<br><br>Ce paragraphe est destiné à montrer que l'algèbre linéaire ne se réduit pas à l'étude d'espaces vectoriels de dimension finie. |

## Travaux dirigés

Exemples simples de calculs de déterminants d'ordre 3.
Exemples d'emploi de changement de bases.
Exemples de détermination de valeurs propres, et vecteurs propres.
Exemples de calculs de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice.
Application à l'étude de suites définies par récurrence par $u_{n+1} = a\, u_n + b\, u_{n-1}$ ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) dans des situations issues des probabilités, des sciences biologiques.

# IV - ANALYSE

Le but de cette partie est de consolider les notions de base vues en première année. Par ailleurs on introduit les notions d'intégrale généralisée et de série numérique en vue de leur utilisation en probabilité.

**I. CALCUL INTÉGRAL**

A) DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Exercices sur le programme de première année.

B) COMPLÉMENTS

Théorème de Taylor avec reste intégral.

C) GÉNÉRALISATION

Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment, sur un intervalle.

Généralisation de la notion d'intégrale aux fonctions continues par morceaux.

On évitera les développements théoriques.

Propriétés.

On pourra admettre la plus grande partie des résultats.

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et soit a un point de I, étude des propriétés de la fonction F définie sur I par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

croissance dans le cas où f est positive, continuité et dérivabilité.

Résultats admis.

D) INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Cette rubrique est introduite en vue du calcul des probabilités. Au cours d'une épreuve de mathématiques les intégrales généralisées ne pourront intervenir que dans un cadre probabiliste.

*a) Définition*

Définition de l'intégrale d'une fonction continue de signe constant sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert, convergence et divergence.

Utilisation d'une primitive.
Intégrales de Riemann.

Intégration par parties.
Intégration par changement de variable.

*b) Propriétés*

Relation de Chasles.
Linéarité.
Intégrale généralisée et relation d'ordre.

Résultat admis.

*c) Convergence*

Théorème de comparaison pour deux fonctions positives f et g telles que :

$$f \leq g.$$

Tout autre critère de comparaison est hors programme.

**II. FONCTIONS NUMÉRIQUES**

A) DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Exercices sur le programme de première année.

B) COMPLÉMENTS

Fonction négligeable devant une fonction.
Fonctions équivalentes.

Notations : $f = o(g)$
$f \sim g$.

Développements limités au voisinage de zéro.
Propriétés.

Théorème de Taylor-Young.
Existence des développements limités.

Ce théorème sera démontré à partir du théorème de Taylor avec reste intégral, la fonction f ayant les propriétés nécessaires.

Opérations sur les développements limités (somme, produit, quotient et composition).
Intégration des développements limités.

Développements limités usuels au voisinage de zéro des fonctions :
exp, cos, sin, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ où $\alpha$ est un réel.

Développements limités au voisinage d'un point quelconque.

**Travaux dirigés**

Exemples de recherche d'équivalents.
Exemples d'étude de fonctions.
Exemples d'approximation d'une courbe au voisinage d'un point.
Exemples de recherche de courbes asymptotes et position relative locale.
Exemples d'étude de fonctions définies à l'aide d'intégrales.

## III. SÉRIES NUMÉRIQUES

Cette rubrique est introduite en vue du calcul des probabilités. Au cours d'une épreuve de mathématiques les séries ne pourront intervenir que dans le cadre probabiliste.
L'étude des séries entières n'est pas au programme.
Les séries considérées seront à termes positifs.

| | |
|---|---|
| Définition, notion de terme général.<br>Convergence et divergence d'une série.<br>Notion de reste d'une série convergente. | |
| Propriété de linéarité. | |
| Convergence et calcul de la somme pour les séries géométriques, les séries de terme général $nq^n$, $n^2 q^n$ et les séries exponentielles. | Les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ sont hors programme. |
| Théorème de comparaison pour deux séries à termes positifs, telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. | Tout autre critère de comparaison est hors programme. |
| Sommation par paquets. | Résultat admis |

**Travaux dirigés**

On pourra envisager des exemples de séries à termes de signe quelconque dont on peut ramener l'étude à celle de séries à termes positifs.

## IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercices sur le programme de première année.

Équations à coefficients non constants :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont des fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle I.

On replacera ce problème dans le cadre des espaces vectoriels de dimension infinie.

**Travaux dirigés**

Exemples d'études d'équations différentielles du type $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ où a, b et c sont trois fonctions continues sur un intervalle I. Les problèmes de recollement doivent rester très simples.

# V - PROBABILITES

Cette rubrique a pour but d'introduire les variables aléatoires réelles et de compléter et consolider les techniques du calcul des probabilités vues en première année.
On ne soulèvera aucune difficulté théorique sur les notions introduites dans cette partie du programme où en bon nombre de résultats seront admis.

| | |
|---|---|
| **I. CONCEPTS DE BASE DES PROBABILITÉS** | |
| *a) Généralités* | |
| Exercices sur le programme de première année. Extension des définitions données en première année au cas où l'univers est un ensemble infini. | On pourra signaler les problèmes qui peuvent survenir pour la définition de la probabilité d'une partie quelconque de l'univers mais la notion de tribu et les résultats sur la probabilité d'une réunion ( respectivement une intersection ) croissante ( respectivement décroissante ) d'événements sont hors programme. |
| Probabilité d'une réunion dénombrable d'événements. | |
| Révision et extension à ce nouveau cadre des résultats de première année sur les probabilités et sur les probabilités conditionnelles. | |
| *b) Variables aléatoires* | |
| Définition d'une variable aléatoire sur un univers quelconque (l'image réciproque d'un intervalle doit avoir une probabilité ). | Aucun développement théorique n'est au programme. |
| Fonction de répartition. | Faire le lien avec la recherche de la probabilité de l'image réciproque d'un intervalle. |
| Propriétés d'une fonction de répartition. | Résultats admis. |
| **II. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES** | |
| *a) Définitions* | |
| On étendra la définition vue en première année au cas où l'ensemble des valeurs prises est contenu dans l'ensemble des entiers relatifs. | |
| Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète. | Diagramme en bâtons. |
| Fonction de répartition. | Représentation graphique.<br>On fera le lien avec les statistiques descriptives. |
| Détermination de la loi de la variable aléatoire à partir de la fonction de répartition. | |

*b) Moments*

| | |
|---|---|
| Espérance mathématique. | |
| Expression de l'espérance de $\Phi(X)$, où $\Phi$ est une fonction numérique et X une variable aléatoire. | Résultat admis. |
| Variance et écart-type. | On fera le lien avec les statistiques descriptives. |
| Moments. | |

**<u>Travaux dirigés</u>**

Présentation des lois classiques : loi certaine,
loi uniforme discrète,
loi de Bernoulli,
loi binomiale,
loi hypergéométrique.

Les étudiants devront savoir reconnaître les situations classiques de modélisation pour ces lois.

L'espérance et la variance de ces lois doivent être connues (les démonstrations pour la loi binomiale et le loi hypergéométrique ne sont pas exigibles).

Loi géométrique, modèle, espérance et variance.
Loi de Poisson, espérance et variance.

Exemples variés de lois discrètes.

## III. <u>VARIABLES À DENSITÉ</u>

| | |
|---|---|
| Définition : fonctions de répartition et de densité. | On se limitera au cas où la fonction de répartition est continue partout et continûment dérivable sauf éventuellement en un nombre fini de points. |
| Sur des exemples simples, recherche de la loi de la variable Y = f(X), X ayant une densité connue. | |
| Espérance, variance et écart-type. | On fera une analogie avec le cas discret. |
| Moments. | |

**<u>Travaux dirigés</u>**

Étude des lois classiques : loi uniforme,
loi exponentielle,
loi normale ( utilisation de la table de la loi normale centrée réduite ).

L'espérance et le variance de ces lois doivent être connues, l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$ doit être connue mais sa justification n'est pas exigible.

Exemples de calculs de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires à densité.

## IV. COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

| | |
|---|---|
| *a) Généralités* | |
| Définition.<br>Fonction de répartition. | Aucune difficulté théorique ne sera soulevée. |
| *b) Cas des couples discrets* | |
| Notation (X,Y).<br>Loi conjointe.<br>Lois marginales. Lois conditionnelles. | |
| Loi de la somme de deux variables aléatoires à valeurs entières positives. | |
| Espérance de u(X,Y). | Résultat admis. |
| Linéarité de l'espérance.<br>Covariance. | Résultat admis. |
| Variables aléatoires indépendantes.<br>Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes alors f(X) et g(Y) sont des variables aléatoires indépendantes. | Résultat admis.<br>. |

**Travaux dirigés**

Détermination de la loi des variables X et Y à partir de la loi du couple (X,Y).
Exemple des variables binomiales et hypergéométriques comme somme de variables de Bernoulli.

Somme de deux variables binomiales indépendantes de même paramètre réel p, de deux variables de Poisson indépendantes.
Coefficient de corrélation linéaire. Il est compris entre –1 et +1 (admis). Il est indépendant des unités choisies.

## V. THÉORÈMES LIMITES

| | |
|---|---|
| Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale.<br>Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. | Résultats admis.<br>La notion générale de convergence en loi n'est pas au programme. |
| Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. | |
| Loi faible des grands nombres.<br>Application à la loi binomiale. | Résultat admis. |
| Théorème de la limite centrée.<br>Application à la loi binomiale et à la loi de Poisson. | Résultat admis. |

**Travaux dirigés**

On utilisera les résultats précédents pour donner des ordres de grandeurs pour des probabilités issues de problèmes concrets.