

# PROGRAMMES PERMANENTS DES CONCOURS EXTERNES ET INTERNES DU CAPLP ET DES CAFEP ET CAER CORRESPONDANTS

N.S. n° 2005-095 du 22-6-2005  
NOR : MENP0501247N  
RLR : 824-1d ; 531-7  
MEN - DPE A

## Mathématiques-sciences physiques

### Programme de mathématiques

Le programme des épreuves écrites des concours externe et interne d'accès au corps des professeurs de lycée professionnel est défini par les titres A et B ci-dessous.

Le programme des épreuves orales des concours externe et interne porte sur le titre A augmenté des paragraphes suivants du titre B.

I - Analyse : § 2. Fonctions d'une variable réelle - § 3. Équations différentielles

II - Algèbre : § 1. Nombres complexes.

III - Combinatoire. Statistiques. Probabilités : § 1. Combinatoire - § 2. Statistique descriptive - § 3. Probabilité

IV - Géométrie : § 1. Géométrie du plan et de l'espace.

#### A - Programme des lycées professionnels

Ce programme comporte tous les programmes des classes de lycées professionnels en vigueur l'année du concours.

#### B - Programme complémentaire

##### I - Analyse

1. Notions élémentaires sur les suites et les séries

a) Propriétés fondamentales du corps  $\mathbb{R}$  des réels : majorants, minorants, borne supérieure, borne inférieure. Toute partie non vide de  $\mathbb{R}$  majorée admet une borne supérieure (admis). Aucune construction de  $\mathbb{R}^n$  est au programme.

b) Convergence d'une suite de nombres réels ; opérations sur les suites convergentes. Convergence d'une suite monotone ; exemples de suites adjacentes.

Exemples d'études de suites définies par une relation de récurrence  $U_{n+1} = f(U_n)$ .

c) Définition de la convergence d'une série à termes réels. Convergence des séries géométriques.

Séries à termes positifs : comparaison de deux séries dans le cas où  $U_n \leq V_n$  et où  $U_n \sim V_n$ . Comparaison à une intégrale ; convergence de séries de Riemann. Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert. Comparaison à une série de Riemann.

Séries absolument convergentes. Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0.

2. Fonctions d'une variable réelle

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point.

a) Fonctions à valeurs réelles : continuité, dérivation.

1° Limite et continuité en un point. Opérations sur les limites. Limite d'une fonction monotone. Propriété fondamentale des fonctions continues (admise) : l'image d'un intervalle (respectivement d'un segment) est un intervalle (respectivement un segment).

Continuité de la fonction réciproque d'une fonction strictement monotone et continue sur un intervalle.

2° Dérivée en un point : dérivabilité sur un intervalle. Fonction dérivée. Opérations sur les fonctions dérivées. Dérivée de la composée de deux fonctions, d'une fonction réciproque.

Définition des fonctions de classes  $C^p$ ,  $C^\alpha$ . Dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibnitz).

3° Théorème de Rolle, formule des accroissements finis, inégalité des accroissements finis. Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones.

4° Étude locale des fonctions. Comparaison des fonctions au voisinage d'un point : fonction négligeable devant une autre, fonctions équivalentes (notation  $f \sim g$ ). Comparaison des fonctions exponentielle, puissance et logarithme au voisinage de +.

Développements limités, opérations sur les développements limités. Formule de Taylor Young. Développements limités des fonctions usuelles.

5° Fonctions usuelles : fonctions circulaires, circulaires réciproques, logarithmes, exponentielles, puissances, hyperboliques, hyperboliques réciproques.

b) Fonctions à valeurs réelles : intégration sur un segment.

Les seules connaissances exigibles portent sur l'intégration des fonctions continues par morceaux.

1° Linéarité de l'intégrale.

$$\text{Si } a < b, \quad \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.

Somme de Riemann d'une fonction continue ; convergence de ces sommes.

2° Primitives d'une fonction continue sur un intervalle.

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral ; si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$  et à un point de  $I$ ,

$$\text{La fonction } x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  s'annulant au point  $a$  ; inversement, pour toute primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  et pour tout couple  $(a, b)$  de points  $I$ ,

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Intégration par parties, changement de variable. Exemples de calcul de primitives, notamment de fonctions rationnelles, de polynômes trigonométriques.

Formule de Taylor avec reste intégral.

3° Exemples de calcul de valeurs approchées d'une intégrale. Exemples de calcul d'aires planes, de volumes, de masses.

c) Fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Extension à ces fonctions des notions et propriétés suivantes :

Dérivée en un point. Opérations sur les dérivées. Développements limités, formule de Taylor Young.

Fonction  $t \rightarrow e^{it}$  ( $t$  réel). Symbole  $e^z$  ( $z$  complexe), règles de calcul.

Dérivation et intégration de  $t \rightarrow e^{at}$  ( $t$  réel,  $a$  complexe).

Intégration, intégration par parties, formule de Taylor avec reste intégral.

d) Notions sur les intégrales impropres.

Définition de la convergence des intégrales ;

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt ; \text{ extension aux intégrales } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

Convergence des intégrales de Riemann :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ et } \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ où } \alpha \text{ est réel.}$$

Intégrales de fonctions positives : comparaison

dans les cas  $f \sim g$  et  $f \sim g$ .

Intégrales absolument convergentes.

### 3. Équations différentielles

a) Définition sur un intervalle d'une solution d'une équation différentielle de la forme  $y' = f(x, y)$  ; courbe intégrale (aucun théorème d'existence n'est au programme).

b) Équation différentielle linéaire du premier ordre  $ay' + by = c$  où  $a, b, c$  sont des fonctions numériques continues sur un même intervalle. Recherche, sur un intervalle où  $a$  ne s'annule pas, de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée.

c) Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, dont le second membre est de la forme  $e^{mt} P(t)$ ,  $P$  étant un polynôme et  $m$  un réel ou un complexe.

### 4. Notions sur les séries de Fourier

a) Coefficients et série de Fourier d'une fonction  $2\pi$  - périodique continue par morceaux à valeurs complexes (expression sous forme exponentielle, expression en cosinus et sinus).

b) Théorème de Dirichlet (admis) :

$$\text{convergence de } \sum_{k=-n}^{k=+n} C_k(f) e^{ikx}$$

vers la demi somme des limites à droite et à gauche de  $f$  au point  $x$  lorsque  $f$  est de classe  $C^1$  par morceaux. Formule de Parseval (admise) : expression de l'intégrale du carré du module sur une période à l'aide des coefficients de Fourier lorsque  $f$  est continue par morceaux.

Exemples de développement en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle.

Notions sur les fonctions de plusieurs variables réelles

Définition d'une application d'une partie de  $\mathbf{R}^p$  dans  $\mathbf{R}^q$  (se limiter à  $n = 3, p = 3$ ).

Continuité en un point.

Dérivées partielles d'ordre un et supérieur à un.

Théorème de Schwarz (admis).

## II - Algèbre

### 1. Nombres complexes

a) Corps des nombres complexes ; module d'un nombre complexe. Argument d'un nombre complexe non nul ; notation  $e^{i\theta}$ .

b) Formule de Moivre. Formules d'Euler. Résolution de l'équation  $z^n = a$ . Applications trigonométriques de nombres complexes. Lignes de niveau des fonctions  $z \rightarrow |z - a|$  et  $z \rightarrow \text{Arg}(z - a)$ .

c) Transformations géométriques définies par

$$z' = az + b, \text{ et } z' = \bar{z} \text{ et } z' = \frac{1}{z}$$

### 2. Polynômes et fractions rationnelles

a) Algèbre  $\mathbf{K}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{K}$  ( $\mathbf{K}$  est  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ). Degré, division suivant les puissances décroissantes.

Racines, ordre de multiplicité d'une racine. Polynômes irréductibles sur  $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{R}$ . Factorisation. (La construction de l'algèbre des polynômes formels n'est pas au programme, les candidats n'auront pas à connaître la notion de PGCD.)

Fonctions rationnelles : pôles, zéros, ordre de multiplicité d'un pôle ou d'un zéro. Décomposition en éléments simples dans  $\mathbf{C}(X)$  et dans  $\mathbf{R}(X)$  (admis).

### 3. Algèbre linéaire

a) Espaces vectoriels sur le corps  $\mathbf{K}$  ( $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ). 1° Espaces vectoriels, applications linéaires, formes linéaires.

Exemples fondamentaux : espaces de vecteurs du plan et de l'espace, espace  $\mathbf{K}^n$ .

Composition des applications linéaires, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes. Groupe linéaire  $GL(E)$ .

2° Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel, sous-espace vectoriel engendré par  $p$  vecteurs. Image et noyau d'une application linéaire.

Espace vectoriel  $L(E, F)$ .

b) Espaces vectoriels de dimension finie.

Dans un espace admettant une famille génératrice finie, définition des familles libres, des familles génératrices et des bases. Exemple fondamental : base canonique de  $\mathbf{K}^n$ . Dimension. Rang d'une famille de  $p$  vecteurs.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, projecteurs.

c) Matrices.

Espace vectoriel  $M_p, q(\mathbf{K})$  des matrices à  $p$  lignes et  $q$  colonnes.

Isomorphisme entre  $L(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^p)$  et  $M_{p,q}(\mathbf{K})$ .

Produit matriciel, transposition. Algèbre  $M_n(\mathbf{K})$  ; matrices inversibles ; groupe linéaire  $GL_n(\mathbf{K})$ .

Changement de base pour une application linéaire, matrice de passage.

d) Éléments propres.

Valeurs propres, vecteurs propres pour une application linéaire.

Diagonalisation en dimension 2 ou 3.

e) Déterminant d'une matrice.

Calcul du déterminant d'une matrice en dimension 2 et en dimension 3.

f) Système d'équations linéaires.

Pratique de la méthode de Gauss pour la résolution de systèmes d'équations

### III - Combinatoire - Statistiques - Probabilités

#### 1. Combinatoire

a) Nombre des applications d'un ensemble à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments ; nombre des injections ; arrangements. Nombre des permutations d'un ensemble à  $n$  éléments.

b) Nombre des parties à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments, combinaison.

c) Formule du binôme.

#### 2. Statistique descriptive

a) Analyse statistique d'une variable observée sur les individus d'une population. Exemples de variables qualitatives et de variables quantitatives : effectifs, fréquences, histogrammes.

Caractéristiques de position (moyenne, médiane, mode, quantile).

Caractéristiques de dispersion (variance, écart-type).

b) Analyse statistique élémentaire de deux variables observées sur les individus d'une population. Tableaux d'effectifs, fréquences marginales, fréquences conditionnelles. Covariance et coefficient de corrélation linéaire. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression.

#### 3. Probabilité

a) Probabilité sur les ensembles finis : vocabulaire des événements, probabilité, équiprobabilité. Exemples simples de dénombrement. Probabilités conditionnelles, événements indépendants.

b) Variables aléatoires.

1° Définition d'une variable aléatoire à valeurs réelles. Événements liés à une variable aléatoire.

2° Variables aléatoires réelles discrètes :

Loi de probabilité. Fonction de répartition  $F(x) = P(X \leq x)$  ; Moments : espérance, variance, écart-type ;

Lois discrètes usuelles : loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, de Poisson.

3° Vecteurs aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  discrets. Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Lois marginales.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles ;

Linéarité de l'espérance mathématique. Espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires, covariance.

4° Variables aléatoires à densité.

On dira qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs réelles admet une densité  $f$  si, quel que soit l'intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt,$$

où  $f$  est une fonction à valeurs réelles positives ayant un nombre fini de points de discontinuité et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Moments : espérance, variance, écart-type.

Lois définies par une densité usuelle : loi uniforme, exponentielle, normale.

### IV - Géométrie

#### 1. Géométrie du plan et de l'espace

a) Calcul vectoriel.

Produit scalaire, lien avec la norme et la distance.

Expression dans une base orthonormale.

Relations métriques dans le triangle.

Orthogonalité.

Produit vectoriel dans l'espace orienté.

Systèmes de coordonnées (cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques) ; changement de repère orthonormal.

Barycentre.

**b) Configurations.**

Droites et plans : direction, parallélisme, intersection, orthogonalité. Angle de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.

Distance d'un point à une droite (à un plan).

Équations cartésiennes et représentations paramétriques des droites et plans. Équation normale.

Cercles dans le plan : équation cartésienne.

Sphères : équations cartésiennes. Intersection sphère et plan.

Coniques : équation réduite et équation paramétrique d'une conique en repère orthonormal.

**c) Applications affines.**

Projections, affinités orthogonales ; conservation des barycentres par une application affine.

Isométries du plan ; réflexion, rotations, déplacements.

Exemples d'isométries de l'espace ; réflexions, rotations, vissages.

**2. Géométrie différentielle des courbes planes**

a) Fonction d'une variable réelle à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$  : limite, continuité, dérivée en un point ; opération sur les dérivées. Dérivée d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel.

Fonction de classe  $C^p$ . Définition des développements limités.

b) Étude locale : point régulier ; tangente. Étude de la position locale d'une courbe par rapport à une droite ; branches infinies.

Exemples de construction de courbes paramétrées.

**Programme de sciences physiques**

Le programme des épreuves écrites des concours externe et interne comporte les domaines des sciences physiques et chimiques auxquels il est fait appel dans les enseignements en vigueur durant l'année scolaire du concours, en CAP, BEP, baccalauréat professionnel ainsi que dans la série STL physique du laboratoire

et des procédés industriels et chimie du laboratoire et des procédés industriels.

On attend notamment des candidats :

- qu'ils possèdent une culture scientifique comportant des références à l'histoire des sciences et des techniques .

- qu'ils sachent mettre en oeuvre, à un niveau post-baccalauréat (STS, DEUG, DUT) les principes et les lois de la chimie et de la physique dans les domaines précisés dans le programme ci-dessus, à l'exception, pour les programmes de baccalauréat professionnel, des unités spécifiques suivantes :

- C13 : Textiles

- C14 : Matériaux inorganiques de construction : ciments, plâtres, verres

- C15 : Céramiques

- O4 : Détecteurs et amplificateurs de lumière.

Pour ces quatre unités spécifiques aucune exigence de niveau post-baccalauréat n'est demandée.

**Précisions sur l'utilisation des calculatrices**

Pour les épreuves d'admissibilité, les candidats sont autorisés à se servir d'une calculatrice conforme aux spécifications définies par la note n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Pour les épreuves d'admission, les calculatrices personnelles ne sont pas autorisées. Une calculatrice est mise à la disposition de chacun des candidats sur le lieu des épreuves.

La présente note **abroge** et **remplace** la note du 23 juin 1995 publiée au B.O. n° 27 du 6 juillet 1995. (B.O. n° 37 du 11 octobre 2001).

Pour le ministre de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche et par délégation,

Le directeur des personnels enseignants

Pierre-Yves DUWOYE