

# Annexe 1

## CLASSE DE PREMIÈRE ANNÉE MPSI

Le programme de première année MPSI est organisé en trois parties. Dans une première partie figurent les notions et les objets qui doivent être étudiés dès le début de l'année scolaire. Il s'agit essentiellement, en partant du programme de la classe de Terminale S et en s'appuyant sur les connaissances préalables des étudiants, d'introduire des notions de base nécessaires tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques (physique, chimie, sciences industrielles...). Certains de ces objets seront considérés comme définitivement acquis (nombres complexes, coniques, ...) et il n'y aura pas lieu de reprendre ensuite leur étude dans le cours de mathématiques; d'autres, au contraire, seront revus plus tard dans un cadre plus général ou dans une présentation plus théorique (groupes, produit scalaire, équations différentielles, ...).

Les deuxième et troisième parties correspondent à un découpage classique entre l'analyse et ses applications géométriques d'une part, l'algèbre et la géométrie euclidienne d'autre part.

## PROGRAMME DE DÉBUT D'ANNÉE

### I. NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

#### 1- Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes déjà abordées en classe de Terminale. Le programme combine l'étude du corps des nombres complexes et de l'exponentielle complexe avec les applications des nombres complexes aux équations algébriques, à la trigonométrie et à la géométrie.

Il est souvent commode d'identifier  $\mathbf{C}$  au plan euclidien notamment pour les problèmes d'origine géométrique, ce qui permet d'exploiter le langage de la géométrie pour l'étude des nombres complexes et, inversement, d'utiliser les nombres complexes pour traiter certaines questions de géométrie plane. En particulier, les étudiants doivent savoir interpréter à l'aide des nombres complexes les notions suivantes de la géométrie euclidienne plane : calcul vectoriel, barycentre, alignement, orthogonalité, distance, mesure d'angle.

#### a) Corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes

Corps  $\mathbf{C}$  des nombres complexes. Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, conjugaison dans  $\mathbf{C}$ .

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, affixe d'un point, d'un vecteur; image d'un nombre complexe.

Module d'un nombre complexe, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire; interprétation en termes de distances.

La construction du corps  $\mathbf{C}$  n'est pas exigible des étudiants.

Notations  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ ,  $\bar{z}$ .

Interprétation géométrique des transformations  $z \mapsto \bar{z}$ ,  $z \mapsto z + b$ .

Notation  $|z|$ ; relation  $|z|^2 = \bar{z}z$ .

Interprétation géométrique de  $|z|$ , de  $|z - a|$ ; disque ouvert (fermé) de centre  $a$ .

#### b) Groupe $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition du groupe  $\mathbf{U}$  des nombres complexes de module 1. Cercle trigonométrique.

Définition de  $e^{i\theta}$ , relations d'Euler.

Morphisme  $\theta \mapsto e^{i\theta}$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{U}$ . Formule de Moivre.

On se contentera d'une brève présentation de la structure de groupe.

Par définition,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  où  $\theta \in \mathbf{R}$ .

La continuité, la dérivabilité et les variations des fonctions cosinus, sinus et tangente sont supposées connues, ainsi que leurs formules d'addition.

§ Linéarisation et factorisation d'expressions trigonométriques.

Les étudiants doivent connaître les formules donnant  $\cos(a+b)$ ,  $\sin(a+b)$ ,  $\tan(a+b)$ ,  $\cos 2x$ ,  $\sin 2x$ ,  $\tan 2x$ . Ils doivent savoir exprimer  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  et  $e^{i\theta}$  à l'aide de  $\tan \frac{\theta}{2}$  et relier ces formules à la représentation paramétrique rationnelle du cercle trigonométrique privé de  $-1$ .

## MPSI

Arguments d'un nombre complexe non nul. Écriture d'un nombre complexe  $z \neq 0$  sous la forme  $\rho e^{i\theta}$  où  $\rho > 0$  et  $\theta \in \mathbf{R}$  (forme trigonométrique).

Racines  $n$ -ièmes de l'unité. Résolution de l'équation  $z^n = a$ .

### c) Équations du second degré

Résolution des équations du second degré à coefficients complexes; discriminant. Relations entre coefficients et racines.

### d) Exponentielle complexe

Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe :

$$e^z = e^x e^{iy} \quad \text{où } z = x + iy.$$

Propriétés.

### e) Nombres complexes et géométrie plane

Interprétation géométrique des transformations :

$$z \mapsto az, \quad z \mapsto az + b, \quad z \mapsto \bar{z}.$$

Interprétation du module et de l'argument de  $z \mapsto \frac{1}{z}, \frac{z-a}{z-b}$ .

La continuité, la dérivabilité et les variations de la fonction exponentielle réelle sont supposées connues, ainsi que son équation fonctionnelle.

Les étudiants doivent savoir interpréter à l'aide des nombres complexes les notions suivantes de la géométrie euclidienne plane : distance, mesure d'angle, barycentre, alignement, orthogonalité.

## 2- Géométrie élémentaire du plan

À l'issue de la Terminale, les étudiants connaissent le plan géométrique euclidien et l'espace géométrique euclidien de dimension 3 en tant qu'ensemble de points. Ils connaissent en particulier la façon d'associer à deux points  $A$  et  $B$  le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , ainsi que les propriétés opératoires usuelles. Il convient de faire constater que l'ensemble des vecteurs du plan (respectivement de l'espace) est muni d'une structure de plan vectoriel réel (respectivement d'espace vectoriel réel de dimension 3), défini comme espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  dont tout vecteur s'exprime comme combinaison linéaire de deux vecteurs indépendants, c'est-à-dire non colinéaires (respectivement trois vecteurs indépendants, c'est-à-dire non coplanaires). Toute théorie générale des espaces vectoriels est exclue à ce stade. Les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel et barycentrique, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormal, angles, angles orientés dans le plan euclidien.

La donnée d'un repère orthonormal identifie le plan à  $\mathbf{R}^2$  ou à  $\mathbf{C}$  (respectivement l'espace à  $\mathbf{R}^3$ ).

### a) Modes de repérage dans le plan

Repère cartésien du plan, coordonnées cartésiennes. Repère orthonormal direct, changement de repère.

Les formules de changement de repère sont à connaître uniquement dans le cas où les deux repères sont orthonormaux directs.

Coordonnées polaires d'un point du plan supposé muni d'un repère orthonormal.

Le repère orthonormal identifie le plan à  $\mathbf{C}$ .

Équation polaire d'une droite, d'un cercle passant par  $O$ .

Repère polaire  $(\vec{u}, \vec{v})$  du plan euclidien  $\mathbf{R}^2$  défini, pour tout nombre réel  $\theta$ , par

Identification  $\vec{u} = e^{i\theta}, \vec{v} = ie^{i\theta}$ .

$$\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2,$$

$$\vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2$$

où  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ .

### b) Produit scalaire

Définition géométrique du produit scalaire. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls

Interprétation en terme de projection.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}),$$

et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  sinon.

Bilinéarité, symétrie, expression en base orthonormale.

Dans  $\mathbf{C}$ , interprétation géométrique de  $\operatorname{Re}(\bar{a}b)$ .

## MPSI

## c) Déterminant

Définition géométrique du déterminant. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls

$$\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}),$$

et  $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  sinon.

Bilinéarité, antisymétrie, expression en base orthonormale directe.

La notion d'orientation du plan est admise, ainsi que celle de base orthonormale directe.

Dans **C**, interprétation de  $\text{Im}(\bar{a}b)$  comme déterminant des vecteurs associés à  $a$  et  $b$ . Interprétation géométrique de  $|\text{Det}(\vec{u}, \vec{v})|$  comme aire du parallélogramme construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

## d) Droites

Applications du déterminant à la colinéarité de deux vecteurs, l'alignement de trois points.

Lignes de niveau de  $M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$  et de  $M \mapsto \text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ .

Paramétrage et équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, par un point et un vecteur normal.

Distance à une droite, équation normale d'une droite.

## e) Cercles

Équation cartésienne d'un cercle. Intersection d'un cercle et d'une droite. Intersection de deux cercles.

Caractérisation d'un cercle de diamètre  $[AB]$  par l'équation  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

Angles de droites. Étant donnés deux points distincts  $A$  et  $B$ , ensemble des points  $M$  tels que  $(MA, MB) = \alpha$ , ensemble des points  $M$  tels que  $MB = kMA$ .

## 3- Géométrie élémentaire de l'espace

## a) Modes de repérage dans l'espace

Coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques.  
Changements de repère.

Pour les coordonnées sphériques, on convient de noter  $\theta$  la colatitude, mesure dans  $[0, \pi]$  de l'angle entre  $Oz$  et  $OM$ .

## b) Produit scalaire

Définition géométrique du produit scalaire. Bilinéarité, symétrie, expression en base orthonormale.

Expression de la distance de deux points dans un repère orthonormal.

## c) Produit vectoriel

Définition géométrique du produit vectoriel de deux vecteurs. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls, le produit vectoriel de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur de norme  $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$  directement orthogonal à  $(\vec{u}, \vec{v})$ ; sinon le produit vectoriel est le vecteur nul. Notation  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .

La notion d'orientation de l'espace est admise, ainsi que celle de base orthonormale directe. Il convient de donner les conventions physiques usuelles.

Interprétation de  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$  comme aire du parallélogramme construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Bilinéarité, antisymétrie. Expression dans un repère orthonormal direct. Condition de colinéarité de deux vecteurs.

## d) Déterminant ou produit mixte

Définition du produit mixte (ou déterminant) de trois vecteurs :

$$\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Interprétation de  $|\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$  comme volume du parallélépipède construit sur  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

Trilinéarité, antisymétrie. Expression en repère orthonormal direct. Condition pour que trois vecteurs soient coplanaires.

## MPSI

### e) Droites et plans

Paramétrage d'une droite définie par un point et un vecteur directeur, deux points distincts, deux plans sécants.

Équation d'un plan défini par un point et deux vecteurs indépendants, un point et un vecteur normal, trois points non alignés. Équation normale d'un plan ; distance à un plan.

Perpendiculaire commune.

Distance à une droite.

### f) Sphères

Équation cartésienne d'une sphère en repère orthonormal.

Intersection d'une sphère et d'une droite, d'une sphère et d'un plan, de deux sphères.

## II. FONCTIONS USUELLES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

*Les propriétés élémentaires liées à la continuité et à la dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle sont supposées connues. Les dérivées des fonctions circulaires réciproques seront déterminées en admettant le théorème sur la dérivabilité d'une fonction réciproque.*

### 1- Fonctions usuelles

*Les propriétés des fonctions polynomiales et rationnelles et des fonctions exp, (sur  $\mathbf{R}$ ), ln, cos, sin sont rappelées sans démonstration.*

#### a) Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances

Fonctions exponentielles réelles, fonctions logarithmes. Fonctions puissances. Croissances comparées de ces fonctions.

Fonctions hyperboliques ch, sh et th. Fonctions hyperboliques réciproques Arg ch, Arg sh et Arg th.

Les étudiants doivent savoir dériver une fonction de la forme  $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ .

Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations et les représentations graphiques des fonctions hyperboliques directes et réciproques.

En ce qui concerne la trigonométrie hyperbolique, la seule formule exigible des étudiants est la relation  $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$  et son interprétation géométrique.

#### b) Fonctions circulaires

Fonctions circulaires cos, sin et tan.

Fonctions circulaires réciproques Arc sin, Arc cos, Arc tan.

Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations et les représentations graphiques des fonctions circulaires directes et réciproques.

#### c) Fonction exponentielle complexe

Dérivation de  $t \mapsto e^{at}$  où  $a \in \mathbf{C}$  ; dérivation de  $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ , où  $\varphi$  est à valeurs complexes.

La dérivée d'une fonction à valeurs complexes est définie par dérivation des parties réelle et imaginaire.

## MPSI

### 2- Équations différentielles linéaires

Il convient ici de rappeler la notion de primitive et d'admettre le théorème fondamental la reliant à la notion d'intégrale. Toute théorie générale de l'intégration est exclue à ce stade.

L'objectif, très modeste, est d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre et les équations linéaires du second ordre à coefficients constants.

Il convient de relier cette étude à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal) en dégagant la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance.

#### a) Équations linéaires du premier ordre

Caractérisation de la fonction  $t \mapsto e^{at}$  ( $a \in \mathbf{C}$ ) par l'équation différentielle  $y' = ay$  et la condition initiale  $y(0) = 1$ .

Équation  $y' + a(t)y = b(t)$ , où  $a, b, c$  sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. Équation sans second membre associée.

Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée. Droite vectorielle des solutions de l'équation sans second membre associée. Expression des solutions sous forme intégrale.

Équation fonctionnelle  $f(t+u) = f(t)f(u)$  où  $f$  est une fonction dérivable de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$ .

Conséquences de la linéarité de l'équation : structure de l'ensemble des solutions ; la solution générale de l'équation avec second membre est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre ; principe de superposition lorsque  $b = b_1 + b_2$ .

#### b) Méthode d'Euler

§ Méthode d'Euler de résolution approchée dans le cas d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Interprétation graphique.

#### c) Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation  $ay'' + by' + cy = f(t)$ , où  $a, b, c$  sont des nombres complexes,  $a \neq 0$ , et  $f$  une somme de fonctions de type  $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)$ , où  $\alpha \in \mathbf{C}$  et  $P \in \mathbf{C}[X]$ .

Équation sans second membre associée.

Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée. Plan vectoriel des solutions de l'équation sans second membre associée.

Conséquences de la linéarité de l'équation : structure de l'ensemble des solutions ; la solution générale de l'équation avec second membre est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre ; principe de superposition lorsque  $f = f_1 + f_2$ .

### 3- Courbes paramétrées. Coniques

On adopte ici le point de vue suivant. Par définition, la fonction vectorielle  $f$  tend vers le vecteur  $l$  si  $\|f - l\|$  tend vers zéro ; cela équivaut au fait que les fonctions coordonnées de  $f$  tendent vers les coordonnées de  $l$ .

#### a) Courbes planes paramétrées

Dérivation de  $(f|g)$ ,  $\|f\|$ ,  $\text{Det}(f, g)$  lorsque  $f$  et  $g$  sont deux fonctions  $\mathcal{C}^1$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ .

§ Courbe définie par une représentation paramétrique de classe  $\mathcal{C}^k$

$$t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = f(t).$$

Point régulier, tangente en un point régulier.

Interprétation cinématique : mouvement d'un point mobile, trajectoire, vitesse, accélération.

Branches infinies : directions asymptotiques, asymptotes.

## MPSI

§ Courbe définie par une représentation polaire

$$f(t) = \rho(t) \vec{u}(\theta(t)),$$

où  $\rho$  et  $\theta$  sont deux fonctions réelles de classe  $C^k$  sur un intervalle  $I$  et  $(\vec{u}, \vec{v})$  désigne le repère polaire.

Calcul des coordonnées de la vitesse et de l'accélération dans le repère polaire.

§ Courbe définie par une équation polaire  $\theta \mapsto \rho(\theta)$  où  $\rho$  est de classe  $C^k$  et à valeurs réelles. Expression dans le repère polaire de vecteurs directeurs de la tangente et de la normale.

Les seules connaissances spécifiques exigibles des étudiants concernant l'étude de courbes définies par une équation polaire sont celles indiquées ci-contre.

### b) Coniques

Dans le plan, lignes de niveau de  $\frac{MF}{MH}$ ; définition par excentricité, foyer et directrice d'une parabole, d'une ellipse, d'une hyperbole. Équations réduites, centres, sommets, foyers. Asymptotes d'une hyperbole.

Caractérisation des ellipses et des hyperboles à l'aide des lignes de niveau de  $MF + MF'$  et de  $|MF - MF'|$  (définition bifocale).

Équation polaire d'une conique de foyer  $O$ .

Détermination en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires des tangentes à une conique.

Image d'un cercle par une affinité orthogonale.

Projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan.

Étude des ensembles définis par une équation cartésienne (dans un repère orthonormal) de la forme  $P(x, y) = 0$ , où  $P$  est un polynôme du second degré à deux variables. Équation réduite.

Les étudiants doivent savoir distinguer la nature de la conique à l'aide du discriminant.

MPSI

## ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme d'analyse est organisé autour des concepts fondamentaux de suite et de fonction. La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : suites de nombres réels et de nombres complexes, fonctions définies sur un intervalle de  $\mathbf{R}$  à valeurs réelles ou complexes, courbes planes, notions élémentaires sur les fonctions de deux variables réelles.

Le programme combine l'étude globale des suites et des fonctions (opérations, majorations, caractère lipschitzien, monotonie, convexité, existence d'extremums...) et l'étude de leur comportement local ou asymptotique. En particulier, il convient de mettre en valeur le caractère local des notions de limite, de continuité, de dérivabilité et de tangente.

Il combine aussi l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie d'une suite ou d'une fonction, existence de limites, continuité, existence de zéros et d'extremums de fonctions, existence de tangentes...) avec celle des problèmes quantitatifs (majorations, évaluations asymptotiques de suites et de fonctions, approximations de zéros et d'extremums de fonctions, propriétés métriques des courbes planes...).

En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtention de majorations et de minorations : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue ou du module, emploi du calcul différentiel et intégral (recherche d'extremums, inégalités des accroissements finis et de la moyenne, majorations tayloriennes...). Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatibles avec le passage à la limite), en réservant les inégalités strictes aux cas où elles sont indispensables.

En ce qui concerne l'usage des quantificateurs, il convient d'entraîner les étudiants à savoir les employer pour formuler de façon précise certains énoncés et leurs négations (caractère borné, caractère croissant, existence d'une limite, continuité en un point, continuité sur un intervalle, dérivabilité en un point...). En revanche, il convient d'éviter tout recours systématique aux quantificateurs. A fortiori, leur emploi abusif (notamment sous forme d'abréviations) est exclu.

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (approximations de solutions d'équations numériques, approximations d'une intégrale...) et d'algorithmes de calcul formel (dérivation, primitivation...); plus largement, le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme, notamment pour le tracé de courbes.

### I. NOMBRES RÉELS, SUITES ET FONCTIONS

#### 1- Suites de nombres réels

Pour la notion de limite d'une suite  $(u_n)$  de nombres réels, on adopte les définitions suivantes :

– étant donné un nombre réel  $a$ , on dit que  $(u_n)$  admet  $a$  pour limite si, pour tout nombre réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que, pour tout entier  $n$ , la relation  $n \geq N$  implique la relation  $|u_n - a| \leq \varepsilon$ ; le nombre  $a$  est alors unique, et on le note  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ . Lorsqu'un tel nombre  $a$  existe, on dit que la suite  $(u_n)$  est convergente, ou qu'elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit que  $(u_n)$  est divergente.

– on définit de manière analogue la notion de limite lorsque  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$ ; on dit alors que la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$ .

En ce qui concerne le comportement global et asymptotique d'une suite, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, convergence, divergence...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, vitesse de convergence ou de divergence par comparaison aux suites de référence usuelles...).

#### a) Corps $\mathbf{R}$ des nombres réels

Corps  $\mathbf{R}$  des nombres réels; relation d'ordre, compatibilité avec l'addition, la multiplication.

La construction du corps des nombres réels et la notion de corps totalement ordonné sont hors programme.

## MPSI

Valeur absolue d'un nombre réel, distance de deux points.  
Inégalités triangulaires

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Définition d'une borne supérieure, d'une borne inférieure.  
Toute partie majorée non vide admet une borne supérieure.  
Définition de la droite réelle achevée  $\overline{\mathbf{R}}$ .

Définition des intervalles de  $\mathbf{R}$ . Tout intervalle  $]a, b[$  non vide rencontre  $\mathbf{Q}$  et son complémentaire.

Partie entière d'un nombre réel. Valeurs décimales approchées à la précision  $10^{-n}$ ; approximation par défaut, par excès.

### b) Suites de nombres réels

Espace vectoriel des suites de nombres réels, relation d'ordre.  
Suites majorées, minorées. Suites bornées.  
Suites monotones, strictement monotones.

### c) Limite d'une suite

Limite d'une suite, convergence et divergence.  
Lorsque  $a \in \mathbf{R}$ , la relation  $u_n \rightarrow a$  équivaut à  $u_n - a \rightarrow 0$ .  
Toute suite convergente est bornée.

Espace vectoriel des suites convergeant vers 0; produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0.

Opérations algébriques sur les limites; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Suites extraites d'une suite. Toute suite extraite d'une suite convergeant vers  $a$  converge vers  $a$ .

### d) Relations de comparaison

Étant donnée une suite  $(\alpha_n)$  de nombres réels non nuls, définition d'une suite  $(u_n)$  de nombres réels dominée par  $(\alpha_n)$ , négligeable devant  $(\alpha_n)$ .

Définition de l'équivalence de deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  de nombres réels non nuls. Équivalent d'un produit, d'un quotient.

Si  $u_n = \alpha_n + w_n$ , où  $w_n$  est négligeable devant  $\alpha_n$ , alors  $u_n \sim \alpha_n$ .

Comparaison des suites de référence :

$$n \mapsto a^n, n \mapsto n^\alpha, n \mapsto (\ln n)^\beta, n \mapsto n!$$

où  $a > 0$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\beta \in \mathbf{R}$ .

Exemples simples de développements asymptotiques.

Propriété admise.

Toute partie convexe de  $\mathbf{R}$  est un intervalle.

La notion de développement décimal illimité est hors programme.

Pour la présentation du cours, le programme se place dans le cadre des suites indexées par  $\mathbf{N}$ . On effectue ensuite une brève extension aux autres cas usuels.

Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

Si  $|u_n| \leq \alpha_n$  et  $\alpha_n \rightarrow 0$ , alors  $u_n \rightarrow 0$ .

Si  $v_n \leq u_n \leq w_n$ , et si  $v_n \rightarrow a$  et  $w_n \rightarrow a$ , alors  $u_n \rightarrow a$ .

Si  $v_n \leq u_n$  et si  $v_n \rightarrow +\infty$ , alors  $u_n \rightarrow +\infty$ .

Application à la divergence d'une suite bornée : il suffit d'exhiber deux suites extraites convergeant vers des limites différentes.

La notion de valeur d'adhérence d'une suite est hors programme.

Notations  $u_n = O(\alpha_n)$ ,  $u_n = o(\alpha_n)$ .

Caractérisations à l'aide du quotient  $\frac{u_n}{\alpha_n}$ .

Notation  $u_n \sim v_n$ .

Caractérisation à l'aide du quotient  $\frac{u_n}{v_n}$ .

Si  $u_n \sim v_n$ , alors, à partir d'un certain rang, le signe de  $u_n$  est égal à celui de  $v_n$ .

Toute étude systématique est exclue; en particulier, la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme.

## MPSI

## e) Théorèmes d'existence de limites

Toute suite croissante majorée  $(u_n)$  converge, et

$$\lim_n u_n = \sup_n u_n.$$

Suites adjacentes. Théorème des segments emboîtés.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.

Extension au cas d'une suite croissante non majorée.

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter la notion de suite dichotomique d'intervalles.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants

## f) Brève extension aux suites complexes

Suites à valeurs complexes ; parties réelle et imaginaire d'une suite ; conjugaison.

Suites bornées.

Limite d'une suite à valeurs complexes ; caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Opérations algébriques sur les limites.

Notations  $\operatorname{Re} u_n, \operatorname{Im} u_n, \bar{u}_n, |u_n|$ .

Toute suite convergente est bornée.

## 2- Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Pour la notion de limite d'une fonction  $f$  en un point  $a$  (appartenant à  $I$  ou extrémité de  $I$ ), on adopte les définitions suivantes :

- Étant donné des nombres réels  $a$  et  $b$ , on dit que  $f$  admet  $b$  pour limite au point  $a$  si, pour tout nombre réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout élément  $x$  de  $I$ , la relation  $|x - a| \leq \delta$  implique la relation  $|f(x) - b| \leq \varepsilon$  ; le nombre  $b$  est alors unique, et on le note  $\lim_{x \rightarrow a} f$ . Lorsqu'un tel nombre  $b$  existe, on dit que  $f$  admet une limite finie au point  $a$ .

- On définit de manière analogue la notion de limite lorsque  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$ , ou lorsque  $b = +\infty$  ou  $b = -\infty$ .

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur  $I$  est vraie au voisinage de  $a$  si elle est vraie sur l'intersection de  $I$  avec un intervalle ouvert de centre  $a$  lorsque  $a \in \mathbf{R}$ , avec un intervalle  $]c, +\infty[$  lorsque  $a = +\infty$  et avec un intervalle  $] -\infty, c[$  lorsque  $a = -\infty$ .

En ce qui concerne le comportement global et local (ou asymptotique) d'une fonction, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, existence de zéros, existence d'extremums, existence de limites, continuité, dérivabilité...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, caractère lipschitzien, comparaison aux fonctions de référence au voisinage d'un point...).

## a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, relation d'ordre.

Fonctions majorées, minorées. Fonctions bornées.

Définition d'un extremum, d'un extremum local.

Définition de la borne supérieure (inférieure) d'une fonction.

Fonctions monotones, strictement monotones ; composition.

Sous-espace vectoriel des fonctions paires, des fonctions impaires.

Fonctions  $T$ -périodiques, opérations.

Définition des fonctions lipschitziennes.

Définition de  $|f|, \sup(f, g), \inf(f, g)$ .

Notations  $\max_{x \in I} f(x)$  et  $\max_I f$ .

Notations  $\sup_{x \in I} f(x)$  et  $\sup_I f$ .

## MPSI

### b) Étude locale d'une fonction

Limite d'une fonction  $f$  en un point  $a$ , continuité en un point.

Lorsque  $b \in \mathbf{R}$ , la relation  $f(x) \rightarrow b$  équivaut à la relation  $f(x) - b \rightarrow 0$ .

Lorsque  $a \in \mathbf{R}$ , la relation  $f(x) \rightarrow b$  lorsque  $x \rightarrow a$  équivaut à la relation  $f(a+h) \rightarrow b$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

Limite à gauche, limite à droite.

Continuité à gauche, continuité à droite.

Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.

Espace vectoriel des fonctions tendant vers 0 en un point  $a$  ; produit d'une fonction d'une fonction bornée au voisinage de  $a$  par une fonction tendant vers 0 en  $a$ .

Opérations algébriques sur les limites ; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Limite d'une fonction composée. Image d'une suite convergente.

Existence d'une limite d'une fonction monotone.

### c) Relations de comparaison

Étant donné un point  $a$  (appartenant à  $I$  ou extrémité de  $I$ ) et une fonction  $\varphi$  à valeurs réelles et ne s'annulant pas sur  $I$  privé de  $a$ , définition d'une fonction  $f$  à valeurs réelles, dominée par  $\varphi$  (négligeable devant  $\varphi$ ) au voisinage de  $a$ .

Définition de l'équivalence au voisinage de  $a$  de deux fonctions  $f$  et  $g$  à valeurs réelles ne s'annulant pas sur  $I$  privé de  $a$ . Équivalent d'un produit, d'un quotient.

Si  $f = \varphi + h$ , où  $h$  est négligeable devant  $\varphi$ , alors  $f \sim \varphi$ .

Application à la comparaison des fonctions usuelles.

### d) Fonctions continues sur un intervalle

Espace vectoriel  $\mathcal{C}(I)$  des fonctions continues sur  $I$  et à valeurs réelles.

Composée de deux fonctions continues.

Restriction d'une fonction continue à un intervalle  $J$  contenu dans  $I$ .

Prolongement par continuité en une extrémité de  $I$ .

Image d'un intervalle par une fonction continue. Théorème des valeurs intermédiaires.

Image d'un segment par une fonction continue.

Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

Définition de la continuité uniforme. Continuité uniforme d'une fonction continue sur un segment.

Lorsque  $a \in I$ , dire que  $f$  a une limite finie en  $a$  équivaut à la continuité de  $f$  en ce point.

Lorsque  $a \notin I$ ,  $f$  a une limite finie en  $a$  si et seulement si  $f$  se prolonge par continuité en ce point.

Les limites à gauche (ou à droite) en  $a$  sont définies par restriction de  $f$  à  $I \cap ]-\infty, a[$  (à  $I \cap ]a, +\infty[$ ).

Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée, au voisinage de ce point, par un nombre réel strictement positif.

Si  $|f(x)| \leq g(x)$  et  $g(x) \rightarrow 0$ , alors  $f(x) \rightarrow 0$ .

Si  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , et si  $g(x) \rightarrow b$  et  $h(x) \rightarrow b$ , alors  $f(x) \rightarrow b$ .

Comparaison des bornes (supérieure ou inférieure) et des limites (à gauche ou à droite).

Notations  $f = O(\varphi)$ ,  $f = o(\varphi)$ .

Caractérisations à l'aide du quotient  $\frac{f}{\varphi}$ .

Notation  $f \sim g$ .

Caractérisation à l'aide du quotient  $\frac{f}{g}$ .

Si  $f \sim g$  alors, au voisinage de  $a$ , le signe de  $f(x)$  est égal à celui de  $g(x)$ .

Si  $f$  et  $g$  sont continues,  $|f|$ ,  $\sup(f, g)$ ,  $\inf(f, g)$  le sont.

La démonstration de ces résultats n'est pas exigible.

Les étudiants doivent savoir utiliser les méthodes dichotomiques pour la recherche des zéros d'une fonction continue.

Comparaison des représentations graphiques d'une bijection et de la bijection réciproque.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

Toute étude systématique des fonctions uniformément continues est exclue.

## MPSI

### e) Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Fonctions à valeurs complexes ; parties réelle et imaginaire d'une fonction ; conjugaison.

Notations  $\operatorname{Re} f$ ,  $\operatorname{Im} f$ ,  $\bar{f}$ ,  $|f|$ .

Fonctions bornées.

Limite d'une fonction à valeurs complexes en un point  $a$ , continuité en  $a$  ; caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Toute fonction admettant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point.

Opérations algébriques sur les limites.

Ensemble  $\mathcal{C}(I)$  des fonctions continues sur  $I$  à valeurs complexes.

## II. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Le programme est organisé autour de trois axes :

- Dérivation en un point et sur un intervalle ; notions sur la convexité.
- Intégration sur un segment des fonctions continues par morceaux, à partir de l'intégration des fonctions en escalier.
- Théorème fondamental reliant l'intégration et la dérivation ; exploitation de ce théorème pour le calcul différentiel et intégral, et notamment pour les formules de Taylor.

L'étude générale de la dérivation et de l'intégration doit être illustrée par de nombreux exemples portant sur les fonctions usuelles (vues en début d'année) et celles qui s'en déduisent.

### 1- Dérivation des fonctions à valeurs réelles

#### a) Dérivée en un point, fonction dérivée

Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, à droite.

Extremums locaux des fonctions dérivables.

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation graphique et l'interprétation cinématique de la notion de dérivée en un point.

Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.

Notations  $f'$ ,  $Df$ ,  $\frac{df}{dx}$ .

Pour  $0 \leq k \leq +\infty$ , ensemble  $\mathcal{C}^k(I)$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  ; opérations. Dérivée  $n$ -ième d'un produit (formule de Leibniz).

Notations  $f^{(k)}$ ,  $D^k f$ ,  $\frac{d^k f}{dx^k}$ .

Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

#### b) Étude globale des fonctions dérivables

Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis :

- si  $m \leq f' \leq M$ , alors  $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$  ;
- si  $|f'| \leq k$ , alors  $f$  est  $k$ -lipschitzienne.

Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables.

Pour le théorème de Rolle, l'égalité et l'inégalité des accroissements finis, ainsi que pour la caractérisation des fonctions monotones, on suppose  $f$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

Les étudiants doivent connaître l'interprétation graphique et cinématique de ces résultats.

§ Ils doivent savoir étudier des suites de nombres réels définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  et utiliser une telle suite pour l'approximation d'un point fixe  $a$  de  $f$ .

**MPSI**

§ Application de l'inégalité des accroissements finis à l'étude des suites définies par une relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , de classe  $C^1$  sur  $]a, b[$  et si  $f'$  a une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ .

**c) Fonctions convexes**

Définition, interprétation graphique (tout sous-arc est sous sa corde).

Croissance des pentes des sécantes dont on fixe une extrémité.

Si  $f$  est de classe  $C^1$ ,  $f$  est convexe si et seulement si  $f'$  est croissante. La courbe est alors située au dessus de chacune de ses tangentes.

**d) Brève extension aux fonctions à valeurs complexes**

Dérivabilité en un point, caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire ; opérations sur les fonctions dérivables. Espace vectoriel  $C^k(I)$  des fonctions de classe  $C^k$  à valeurs complexes, où  $0 \leq k \leq +\infty$  ; dérivée  $n$ -ième d'un produit.

Voir le chapitre 4- **Approximation.**

Brève extension au cas d'une limite infinie.

Inégalité de convexité : si  $\lambda_j \geq 0$  et  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ ,

alors

$$f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(a_j).$$

L'étude de la continuité et de la dérivabilité des fonctions convexes est hors programme.

**2- Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles**

*Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment. Les notions de fonction réglée et de fonction intégrable au sens de Riemann sont hors programme.*

**a) Fonctions continues par morceaux**

Définition d'une fonction  $\varphi$  en escalier sur  $[a, b]$ , d'une subdivision de  $[a, b]$  subordonnée à  $\varphi$ . Ensemble des fonctions en escalier sur un segment.

Ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment ; opérations.

Approximation des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier : étant donnée une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$ , pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  en escalier sur  $[a, b]$  telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

**b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux**

Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Linéarité. Croissance.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Notations  $\int_I f$ ,  $\int_{[a,b]} f$ .

Définition de  $\int_a^b f(t)dt$ , où  $a$  et  $b$  appartiennent à  $I$ .

Linéarité. Croissance ; inégalité  $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$ .

Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, relation de Chasles.

Invariance de l'intégrale par translation.

Inégalité des accroissements finis. Caractérisation des fonctions constantes.

Il convient de montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que le théorème de Rolle ne s'étend pas.

Il convient d'interpréter graphiquement l'intégrale d'une fonction à valeurs positives en termes d'aire. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur la notion d'aire.

## MPSI

Valeur moyenne d'une fonction.

Inégalité de la moyenne

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|.$$

Une fonction  $f$  continue et à valeurs positives sur un segment est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Produit scalaire  $(f, g) \mapsto \int_I fg$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{C}(I)$  ;  
inégalité de Cauchy-Schwarz.

Approximation de l'intégrale d'une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$  par les sommes de Riemann

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j)$$

où  $(a_0, \dots, a_n)$  est une subdivision à pas constant.

§ Approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes.

### c) Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Par définition,

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f.$$

Linéarité, relation de Chasles et inégalité de la moyenne.

En particulier

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f|.$$

Toute autre formule ou égalité dite de la moyenne est hors programme.

Cas où  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $[a, b]$ .

## 3- Intégration et dérivation

Dans cette partie, les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

### a) Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition d'une primitive d'une fonction continue.

Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Théorème fondamental : étant donné une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  et un point  $a \in I$ ,

- la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$  ;

- pour toute primitive  $h$  de  $f$  sur  $I$ ,

$$\int_a^x f(t) dt = h(x) - h(a).$$

Il convient de montrer sur des exemples que cette définition ne peut être étendue sans changement au cas des fonctions continues par morceaux.

Pour toute fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

### b) § Calcul des primitives

Intégration par parties pour des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Changement de variable : étant données une fonction  $f$  continue sur  $I$  et une fonction  $\varphi$  à valeurs dans  $I$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Primitives des fonctions usuelles.

Il convient de mettre en valeur l'intérêt de changements de variable affines, notamment pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener, par paramétrage du segment  $[a, b]$ , au cas où l'intervalle d'intégration est  $[0, 1]$  ou  $[-1, 1]$ .

## MPSI

### c) Formules de Taylor

Pour une fonction de classe  $C^{p+1}$  sur  $I$ , formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $p$  en un point  $a$  de  $I$ .  
Majoration du reste : inégalité de Taylor-Lagrange.

Relation  $f(x) = T_p(x) + R_p(x)$ , où

$$T_p(x) = \sum_{n=0}^p \frac{(x-a)^n}{n!} D^n f(a).$$

### d) Développement limités

§ Développement limité à l'ordre  $n$  d'une fonction au voisinage d'un point ; opérations algébriques sur les développements limités : somme, produit ; développement limité de  $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ , application au quotient.

Développement limité des fonctions usuelles  $\exp, \ln, \sin, \cos$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Application à l'étude des points singuliers (ou stationnaires) des courbes paramétrées planes.

Existence d'un développement limité à l'ordre  $p$  pour une fonction de classe  $C^p$  : formule de Taylor-Young.

Développement limité d'une primitive, d'une dérivée.

§ Exemples simples de développements asymptotiques.

Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible.

Toute étude systématique est exclue ; en particulier, la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme.

## 4- Approximation

*Dans cette partie sont regroupées un certain nombre de méthodes débouchant sur des calculs approchés par la mise en place d'algorithmes. Aucune connaissance n'est exigible concernant les erreurs ; seul leurs ordres de grandeur doivent être connus des étudiants. À cette occasion, on pourra introduire la notion de rapidité de convergence d'une suite mais aucune connaissance n'est exigible sur ce point.*

*Les algorithmes présentés ne sont regroupés que pour la commodité de la présentation ; leur étude doit intervenir au fur et à mesure de l'avancement du programme.*

### a) Calcul approché des zéros d'une fonction

On considère ici des fonctions  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$ .

Méthode de dichotomie.

Utilisation de suites récurrentes (méthode d'approximations successives).

Méthode de Newton et algorithme de Newton-Raphson.

Pratique d'un test d'arrêt.

Le théorème du point fixe de Cauchy est hors programme sous forme générale mais les étudiants doivent savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis pour justifier une convergence.

On dégagera, sur des exemples, le caractère quadratique de la convergence.

Convergence dans le cas d'une fonction  $f$  de classe  $C^2$  telle que  $f''$  ne s'annule pas, si la valeur initiale  $x_0$  est telle que  $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$ .

### b) Calcul approché d'une intégrale

Présentation d'un algorithme associé à la méthode des trapèzes. Il convient de souligner l'intérêt des subdivisions dichotomiques.

On admettra que pour une fonction de classe  $C^1$ , l'erreur est un  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , où  $n$  est le nombre de points de la subdivision.

### c) Valeur approchée de réels

On présentera, sur des exemples, quelques algorithmes de calcul de nombres réels remarquables ( $\pi, e, \sqrt{2}$ , etc.).

On pourra utiliser les algorithmes vus précédemment.

## MPSI

## III. NOTIONS SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES

Cette partie constitue une première prise de contact avec les fonctions de plusieurs variables ; toute technicité est à éviter aussi bien pour la présentation du cours qu'au niveau des exercices et problèmes.

L'objectif, très modeste, est triple :

- étudier quelques notions de base sur les fonctions de deux variables réelles (continuité et dérivation) ;
- introduire la notion d'intégrale double ;
- exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes, issus notamment des autres disciplines scientifiques.

En vue de l'enseignement de ces disciplines, il convient d'étendre brièvement ces notions aux fonctions de trois variables réelles. Mais, en mathématiques, les seules connaissances exigibles des étudiants ne portent que sur les fonctions de deux variables.

1- Espace  $\mathbf{R}^2$ , fonctions continues

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie  $A$  de  $\mathbf{R}^2$  qui est muni de la norme euclidienne usuelle ; l'étude générale des normes sur  $\mathbf{R}^2$  est hors programme. Pour la pratique, on se limite aux cas où  $A$  est définie par des conditions simples.

Pour définir la notion de limite, on procède comme pour les fonctions d'une variable réelle.

Espace vectoriel des fonctions définies sur  $A$  et à valeurs réelles. Applications partielles associées à une telle fonction.

Limite et continuité en un point  $a$  d'une fonction définie sur une partie  $A$  et à valeurs réelles.

Espace vectoriel des fonctions continues sur  $A$  et à valeurs réelles ; opérations.

Extension des notions de limite et de continuité à une application de  $A$  dans  $\mathbf{R}^2$  ; caractérisation à l'aide des coordonnées.

Continuité d'une application composée.

Définition des parties ouvertes de  $\mathbf{R}^2$ .

Il convient de montrer, sur un exemple simple, que la continuité des applications partielles n'implique pas la continuité, mais l'étude de la continuité partielle est hors programme.

Les opérations sur les ouverts, ainsi que les notions de partie fermée, de voisinage, d'intérieur et d'adhérence d'une partie sont hors programme.

## 2- Calcul différentiel

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^2$  et à valeurs réelles.

L'objectif essentiel est d'introduire quelques notions de base : dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, développement limité à l'ordre 1, gradient et de les appliquer aux extremums locaux et aux coordonnées polaires ; en revanche, les notions de fonction différentiable et de différentielle en un point sont hors programme.

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'étendre brièvement ces notions au cas où  $f$  est définie sur un ouvert de  $\mathbf{R}^3$ . § Il convient également de donner quelques notions sur les courbes définies par une équation implicite  $F(x, y) = \lambda$  (tangente et normale en un point régulier). En mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

## a) Dérivées partielles premières

Définition de la dérivée de  $f$  en un point  $a$  de  $U$  selon un vecteur  $h$ , notée  $D_h f(a)$ . Définition des dérivées partielles, notées  $D_j f(a)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ .

Il existe un nombre réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout élément  $t \in [-\delta, \delta]$ ,  $a + th$  appartienne à  $U$  ; on pose alors  $\varphi_h(t) = f(a + th)$ . Si  $\varphi_h$  est dérivable à l'origine, on dit que  $f$  admet une dérivée au point  $a$  de  $U$  selon le vecteur  $h$ , et l'on pose  $D_h f(a) = \varphi'_h(0)$ .

Définition des fonctions de classe  $C^1$  sur  $U$  (les dérivées partielles sont continues).

## MPSI

**Théorème fondamental** : si les dérivées partielles sont continues sur  $U$ , alors  $f$  admet, en tout point  $a$  de  $U$ , un développement limité à l'ordre un, ainsi qu'une dérivée selon tout vecteur  $h$ , et

$$D_h f(a) = h_1 D_1 f(a) + h_2 D_2 f(a).$$

En particulier,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  et l'application  $h \mapsto D_h f(a)$  est une forme linéaire. Le gradient de  $f$  est défini, dans le plan euclidien  $\mathbf{R}^2$ , par la relation

$$D_h f(a) = (\text{grad} f(a) | h).$$

Espace vectoriel  $C^1(U)$  des fonctions de classe  $C^1$  sur  $U$ .

Dérivée d'une fonction composée de la forme  $f \circ \varphi$ , où  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $U$ .

Application au calcul des dérivées partielles d'une fonction composée de la forme  $f \circ \varphi$ , où  $\varphi$  est une application de classe  $C^1$  sur un ouvert  $V$  de  $\mathbf{R}^2$  et à valeurs dans  $U$ .

En un point de  $U$  où une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $U$  présente un extremum local, ses dérivées partielles sont nulles.

### b) Dérivées partielles d'ordre 2

**Théorème de Schwarz** pour une fonction de classe  $C^2$  sur  $U$ .

Espace vectoriel  $C^2(U)$  des fonctions de classe  $C^2$  sur  $U$ .

§ Exemples simples d'équations aux dérivées partielles, équation des cordes vibrantes.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner la notation différentielle  $df$ , mais aucune connaissance sur ce point n'est exigible en mathématiques.

Interprétation géométrique du gradient.

La démonstration est hors programme.

## 3- Calcul intégral

**Définition** de l'intégrale double d'une fonction  $f$  continue sur un rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$  et à valeurs réelles.

$$\text{Notation } \iint_R f = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Linéarité, croissance, invariance par translation. Additivité par rapport au domaine d'intégration.

**Théorème de Fubini** : expression de l'intégrale double à l'aide de deux intégrations successives.

Changement de variables affine, intégration sur un parallélogramme.  
 Passage en coordonnées polaires. Intégration sur un disque, une couronne ou un secteur angulaire.

Brève extension au cas d'une fonction continue sur une partie  $A$  bornée de  $\mathbf{R}^2$  définie par conditions simples ; extension du théorème de Fubini lorsque  $A$  est constituée des points  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  tels que  $a \leq x \leq b$  et  $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$  où  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions continues sur  $[a, b]$ . Aucune démonstration sur le théorème de Fubini n'est exigible des étudiants.

La démonstration de ces résultats, ainsi que tout énoncé général concernant les changements de variables, sont hors programme.

MPSI

## IV. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont de classe  $C^k$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  (où  $1 \leq k \leq +\infty$ ) et sont à valeurs dans le plan euclidien  $\mathbf{R}^2$ . En outre, pour la présentation des notions du cours, on suppose que les arcs paramétrés  $\Gamma$  ainsi définis sont réguliers à l'ordre 1, c'est-à-dire que tous leurs points sont réguliers.

## 1- Étude métrique des courbes planes

L'objectif est d'étudier quelques propriétés métriques fondamentales des courbes planes (abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure).

Pour un arc orienté  $\Gamma$  régulier à l'ordre 1, repère de Frenet  $(\vec{T}, \vec{N})$ , abscisse curviligne. L'abscisse curviligne est un paramétrage admissible (la notion de paramétrage admissible sera introduite à cette occasion) ; représentation normale d'un arc. Longueur d'un arc.

Si  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ , où  $2 \leq k < +\infty$ , existence d'une fonction  $\alpha$  de classe  $C^{k-1}$  sur  $I$  telle que, pour tout  $t \in I$ ,  $\vec{T}(t) = \cos \alpha(t) \vec{e}_1 + \sin \alpha(t) \vec{e}_2$ .

Définition de la courbure  $\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$  ; caractérisation des points biréguliers.

Relations

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T}.$$

Dans le cas d'un arc  $\Gamma$  birégulier,  $\alpha$  est un paramétrage admissible de l'arc de classe  $C^{k-1}$  sous-jacent. Rayon de courbure.

Calcul des coordonnées de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet.

Par définition, une abscisse curviligne est une fonction  $s$  de classe  $C^1$  sur  $I$  telle que

$$s'(t) = \|f'(t)\|.$$

La longueur d'un arc est définie à l'aide de l'abscisse curviligne ; toute définition géométrique d'une telle longueur est hors programme.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Relations

$$\frac{df}{ds} = \vec{T}, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha.$$

Aucune connaissance spécifique sur le centre de courbure, le cercle osculateur, les développées et les développantes n'est exigible des étudiants.

$$\text{Relations} \quad \frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{d\alpha} = -\vec{T}.$$

## 2- Champs de vecteurs du plan et de l'espace

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner quelques notions sur les champs de vecteurs du plan et de l'espace.

Potentiel scalaire, caractérisation des champs admettant un potentiel scalaire.

Circulation, intégrale curviligne. Formule de Green-Riemann dans le plan.

Aucune démonstration n'est exigible des étudiants sur ces différents points.

MPSI

## ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

*Le programme d'algèbre et géométrie est organisé autour des concepts fondamentaux d'espace vectoriel et d'application linéaire, et de leurs interventions en algèbre, en analyse et en géométrie. La maîtrise de l'algèbre linéaire élémentaire en dimension finie constitue un objectif essentiel.*

*Le cadre d'étude est bien délimité : brève mise en place des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, de sous-espaces vectoriels supplémentaires, de produit scalaire, sous leur forme générale, en vue notamment des interventions en analyse ; en dimension finie, étude des concepts de base, de dimension et de rang, mise en place du calcul matriciel, étude des espaces vectoriels euclidiens ; interventions de l'algèbre linéaire en géométrie affine et en géométrie euclidienne. La maîtrise de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel constitue un objectif majeur.*

*Pour les groupes, les anneaux et les corps, le programme se limite à quelques définitions de base et aux exemples usuels ; toute étude générale de ces structures est hors programme.*

*Le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme.*

### I. NOMBRES ET STRUCTURES ALGÈBRIQUES USUELLES

#### 1- Vocabulaire relatif aux ensembles et aux applications

*Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent en aucun cas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée en début d'année.*

Ensembles, appartenance, inclusion. Ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$ . Opérations sur les parties : intersection, réunion, complémentaire. Produit de deux ensembles.

Application de  $E$  dans (vers)  $F$  ; graphe d'une application.

Ensemble  $\mathcal{F}(E, F)$  des applications de  $E$  dans  $F$ . Ensemble  $E^I$  des familles  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments d'un ensemble  $E$  indexées par un ensemble  $I$ .

Composée de deux applications, application identique. Restriction et prolongements d'une application.

Équations, applications injectives, surjectives, bijectives. Application réciproque d'une bijection. Composée de deux injections, de deux surjections, de deux bijections.

Images directe et réciproque d'une partie.

Définition d'une loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre. Définition des éléments inversibles pour une loi associative admettant un élément neutre.

Relation d'ordre, ordre total, ordre partiel. Majorants, minorants, plus grand et plus petit élément.

#### 2- Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrements

*En ce qui concerne les nombres entiers naturels et les ensembles finis, l'objectif principal est d'acquérir la maîtrise du raisonnement par récurrence. Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans  $\mathbf{N}$  sont supposées connues ; toute construction et toute axiomatique de  $\mathbf{N}$  sont hors programme.*

*L'équipotence des ensembles infinis et la notion d'ensemble dénombrable sont hors programme.*

*En ce qui concerne la combinatoire, l'objectif est de consolider les acquis de la classe de Terminale S ; le programme se limite strictement aux exemples fondamentaux indiqués ci-dessous.*

*La démonstration des résultats de ce chapitre n'est pas exigible des étudiants.*

##### a) Nombres entiers naturels

Propriétés fondamentales de l'ensemble  $\mathbf{N}$  des nombres entiers naturels. Toute partie non vide a un plus petit élément ; principe de récurrence. Toute partie majorée non vide a un plus grand élément.

Les étudiants doivent maîtriser le raisonnement par récurrence simple ou avec prédécesseurs.

**MPSI**

Suites d'éléments d'un ensemble  $E$  (indexées par une partie de  $\mathbf{N}$ ). Suite définie par une relation de récurrence et une condition initiale.

Exemples d'utilisation des notations  $a_1 + a_2 + \dots + a_p + \dots + a_n$ ,  $a_1 a_2 \dots a_p \dots a_n$ ,  $\sum_{1 \leq p \leq n} a_p$ ,  $\prod_{1 \leq p \leq n} a_p$ .

Suites arithmétiques, suites géométriques. Notations  $na$  et  $a^n$ .

**b) Ensembles finis**

Définition : il existe une bijection de  $[1, n]$  sur  $E$  ; cardinal (ou nombre d'éléments) d'un ensemble fini, notation  $\text{Card } E$ . On convient que l'ensemble vide est fini et que  $\text{Card } \emptyset = 0$ .

Toute partie  $E'$  d'un ensemble fini  $E$  est finie et

$$\text{Card } E' \leq \text{Card } E,$$

avec égalité si et seulement si  $E' = E$ .

Symbole  $n!$  (on convient que  $0! = 1$ ).

On admet que s'il existe une bijection de  $[1, p]$  sur  $[1, n]$ , alors  $p = n$ .

Étant donnés deux ensembles finis  $E$  et  $F$  de même cardinal, et une application  $f$  de  $E$  dans  $F$ ,  $f$  est bijective si et seulement si  $f$  est surjective ou injective.

Une partie non vide  $P$  de  $\mathbf{N}$  est finie si et seulement si elle est majorée. Si  $P$  est finie non vide, il existe une bijection strictement croissante et une seule de l'intervalle  $[1, n]$  sur  $P$ , où  $n = \text{Card } P$ .

**c) § Opérations sur les ensembles finis, dénombrements**

Si  $E$  et  $F$  sont des ensembles finis,  $E \cup F$  l'est aussi ; cardinal d'une réunion finie de parties finies disjointes.

Si  $E$  et  $F$  sont des ensembles finis,  $E \times F$  l'est aussi et

$$\text{Card } (E \times F) = \text{Card } E \cdot \text{Card } F.$$

Cardinal de l'ensemble  $\mathcal{F}(E, F)$  des applications de  $E$  dans  $F$  ; cardinal de l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$ . Cardinal de l'ensemble des bijections (permutations) de  $E$ .

Cardinal  $\binom{n}{p}$  de l'ensemble des parties ayant  $p$  éléments d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments. Combinaisons.

Relations

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n,$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \text{ (triangle de Pascal).}$$

Interprétation ensembliste de ces relations

Ensemble  $\mathbf{Z}$  des nombres entiers, ensemble  $\mathbf{Q}$  des nombres rationnels. Relation d'ordre, valeur absolue.

Les étudiants doivent connaître la relation  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$ .

La construction de  $\mathbf{Z}$  et de  $\mathbf{Q}$  est hors programme.

**3- Structures algébriques usuelles**

*Le programme se limite strictement aux notions de base indiquées ci-dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée en début d'année.*

**a) Vocabulaire relatif aux groupes et aux anneaux**

Définition d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un morphisme de groupes, d'un isomorphisme. Noyau et image d'un morphisme de groupes.

Groupe additif  $\mathbf{Z}$  des nombres entiers.

Ces notions doivent être illustrées par des exemples issus :

des ensembles de nombres, notamment  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{C}$  ;

des applications exponentielle et logarithme ; de l'algèbre linéaire et de la géométrie.

## MPSI

Définition d'un anneau (ayant un élément unité), d'un sous-anneau. Distributivité du produit par rapport au symbole sommatoire  $\sum$ .

Définition d'un corps (commutatif et non réduit à  $\{0\}$ ), d'un sous-corps.

Anneau  $\mathbf{Z}$  des nombres entiers, corps  $\mathbf{Q}$  des nombres rationnels.

### b) § Arithmétique dans $\mathbf{Z}$ . Calculs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ .

Multiplés et diviseurs d'un entier. Division euclidienne dans  $\mathbf{Z}$ , algorithme de la division euclidienne.

Diviseurs communs à deux nombres entiers ; nombres premiers entre eux. PGCD de deux entiers ; algorithme d'Euclide. PPCM de deux entiers ; forme irréductible d'un nombre rationnel.

Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.

Définition des nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition d'un entier strictement positif en produit de facteurs premiers.

Formule du binôme. Relation

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k.$$

Somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique.

Ces notions doivent être illustrées par des exemples issus :

- des ensembles de nombres  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  ;
- des polynômes et fractions rationnelles.

La définition des idéaux de  $\mathbf{Z}$  est hors programme. Les étudiants doivent connaître l'algorithme donnant les coefficients de l'égalité de Bézout, ainsi que l'algorithme d'exponentiation rapide.

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers n'est pas exigible des étudiants.

On généralisera en cours d'année au cas d'éléments qui commutent dans les anneaux de matrices ou d'endomorphismes.

## II. ALGÈBRE LINÉAIRE ET POLYNÔMES

*L'objectif est double :*

- Acquérir les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie (indépendance linéaire, bases, dimension, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, rang) et le calcul matriciel.
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires) et le point de vue matriciel.

*Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine du plan et de l'espace et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.*

*En algèbre linéaire, le programme se limite au cas où le corps de base est  $\mathbf{K}$ , où  $\mathbf{K}$  désigne  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .*

### 1- Espaces vectoriels

#### a) Espaces vectoriels

Définition d'un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ , d'un sous-espace vectoriel.

Intersection de sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une partie.

Somme de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces supplémentaires.

Espace vectoriel produit  $E \times F$ .

Espace vectoriel  $\mathcal{F}(X, F)$  des applications d'un ensemble  $X$  dans un espace vectoriel  $F$ .

Exemples : espace  $\mathbf{K}^n$ , espaces vectoriels de suites ou de fonctions.

La notion générale de somme directe est hors programme.

## MPSI

### b) Translations, sous-espaces affines

Translations d'un espace vectoriel  $E$ .

Définition d'un sous-espace affine : partie de  $E$  de la forme  $a + F$ , où  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Direction d'un sous-espace affine.

Sous-espaces affines parallèles :  $W$  est parallèle à  $W'$  si la direction de  $W$  est incluse dans celle de  $W'$ .

Intersection de deux sous-espaces affines, direction de cette intersection lorsqu'elle n'est pas vide.

Barycentres. Parties convexes (lorsque  $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ).

### c) Applications linéaires

Définition d'une application linéaire, d'une forme linéaire, d'un endomorphisme.

Espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

Composée de deux applications linéaires, réciproque d'une application linéaire bijective. Définition d'un isomorphisme, d'un automorphisme. Linéarité des applications  $v \mapsto v \circ u$  et  $u \mapsto v \circ u$ . Définition du groupe linéaire  $\text{GL}(E)$

Équations linéaires ; noyau et image d'une application linéaire. Description de l'ensemble des solutions de  $u(x) = b$ .

Caractérisation des projecteurs par la relation  $p^2 = p$ .  
Caractérisation des symétries par la relation  $s^2 = I_E$ .

Il convient d'illustrer ces notions par la géométrie du plan et de l'espace, déjà abordée dans les classes antérieures et en début d'année. Il convient de souligner que le choix d'une origine du plan ou de l'espace permet d'identifier points et vecteurs. On évitera cependant de faire systématiquement cette identification.

Homothéties. Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires. Symétries, affinités. Exemples d'applications linéaires en analyse, en géométrie.

L'étude générale du groupe linéaire est hors programme.

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire. Structure de l'ensemble des suites  $(u_n)$  définies par une relation de récurrence de la forme  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ .

## 2- Dimension des espaces vectoriels

### a) Familles de vecteurs

Définition des combinaisons linéaires de  $p$  vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_p$  d'un espace vectoriel ; image par une application linéaire d'une combinaison linéaire.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Définition d'une famille génératrice.

Indépendance linéaire : définition d'une famille libre, liée.

Définition d'une base ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base. Base canonique de  $\mathbf{K}^n$ .

Étant donné un espace vectoriel  $E$  muni d'une base  $(e_1, \dots, e_p)$  et une famille  $(f_1, \dots, f_p)$  de vecteurs d'un espace vectoriel  $F$ , il existe une application linéaire  $u$  et une seule de  $E$  dans  $F$  telle que  $u(e_j) = f_j$ .

### b) Dimension d'un espace vectoriel

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie (espace vectoriel admettant une famille génératrice finie). Théorème de la base incomplète, existence de bases.

Toutes les bases d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie sont finies et ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de  $E$ . On convient que l'espace vectoriel réduit à  $\{0\}$  est de dimension nulle.

Tout espace vectoriel de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbf{K}^n$  ; deux espaces vectoriels de dimension finie  $E$  et  $F$  sont isomorphes si et seulement si  $\dim E = \dim F$ .

Base de  $E \times F$  associée à des bases de  $E$  et de  $F$  ; dimension de  $E \times F$ .

Le cas des familles indexées par un ensemble infini est hors programme.

La donnée d'une famille de  $p$  vecteurs  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$  détermine une application linéaire de  $\mathbf{K}^p$  dans  $E$  ; noyau et image de cette application ; caractérisation des bases de  $E$ , des familles génératrices, des familles libres.

Étant donnée une famille  $S$  de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension  $n$  :

- si  $S$  est libre, alors  $p \leq n$ , avec égalité si et seulement si  $S$  est une base ;
- si  $S$  est génératrice, alors  $p \geq n$ , avec égalité si et seulement si  $S$  est une base.

## MPSI

Étant donné un espace vectoriel  $E$  muni d'une base  $B = (e_j)$  et un espace vectoriel  $F$  muni d'une base  $C = (f_i)$ , une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  et un vecteur  $x$  de  $E$ , expression des coordonnées de  $y = u(x)$  dans  $C$  en fonction des coordonnées de  $x$  dans  $B$ .

Étant donnée une forme linéaire  $\varphi$  sur  $E$ , expression de  $\varphi(x)$  en fonction des coordonnées de  $x$  dans  $B$ .

### c) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Tout sous-espace vectoriel  $E'$  d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$  est de dimension finie et  $\dim E' \leq \dim E$ , avec égalité si et seulement si  $E' = E$ . Rang d'une famille de vecteurs.

Existence de sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un sous-espace vectoriel donné ; dimension d'un supplémentaire.

Les étudiants doivent connaître la relation  $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$ .

### d) Rang d'une application linéaire

Étant donnée une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$ ,  $u$  définit un isomorphisme de tout supplémentaire de  $\text{Ker } u$  sur  $\text{Im } u$  ; en particulier,

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u.$$

Cas d'une forme linéaire : caractérisation et équations d'un hyperplan.

Rang d'une application linéaire, caractérisation des isomorphismes.

Caractérisation des éléments inversibles de  $\mathcal{L}(E)$ .

Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

## 3- Polynômes

L'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes et des fractions rationnelles, et d'exploiter ces objets formels pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

Le programme se limite au cas où le corps de base est  $\mathbf{K}$ , où  $\mathbf{K}$  désigne  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

### a) Polynômes à une indéterminée

Espace vectoriel  $\mathbf{K}[X]$  des polynômes à une indéterminée à coefficients dans  $\mathbf{K}$  ; opérations.

Degré d'un polynôme (on convient que le degré de 0 est  $-\infty$ ), coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'un produit, d'une somme ; les polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$  constituent un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{K}[X]$ .

L'anneau  $\mathbf{K}[X]$  est intègre. Corps  $\mathbf{K}(X)$  des fractions rationnelles, degré d'une fraction rationnelle.

Aucune connaissance sur la construction de  $\mathbf{K}[X]$  n'est exigible des étudiants.

Notation  $a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$  ou, le cas échéant,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ .

Multiplés et diviseurs d'un polynôme, polynômes associés. Division euclidienne dans  $\mathbf{K}[X]$ , algorithme de la division euclidienne.

### b) Fonctions polynomiales et rationnelles

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Équations algébriques. Zéros (ou racines) d'un polynôme ; ordre de multiplicité. Isomorphisme entre polynômes et fonctions polynomiales.

Reste de la division euclidienne d'un polynôme  $P$  par  $X - a$  ; caractérisation des zéros de  $P$ .

§ Algorithme de Horner pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.

Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle ; ordre de multiplicité.

## MPSI

Définition du polynôme dérivé. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit. Dérivées successives, dérivée  $n$ -ième d'un produit (formule de Leibniz). Formule de Taylor, application à la recherche de l'ordre de multiplicité d'un zéro.

## c) Polynômes scindés

Définition d'un polynôme scindé sur  $\mathbf{K}$ ; relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Description des polynômes irréductibles de  $\mathbf{C}[X]$  et de  $\mathbf{R}[X]$ .

Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur  $\mathbf{C}$  et sur  $\mathbf{R}$ .

d) Divisibilité dans l'anneau  $\mathbf{K}[X]$ 

§ Diviseurs communs à deux polynômes, polynômes premiers entre eux. PGCD de deux polynômes; algorithme d'Euclide. PPCM de deux polynômes; forme irréductible d'une fraction rationnelle.

Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.

Polynômes irréductibles. Existence et unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles.

## e) Étude locale d'une fraction rationnelle

§ Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle  $R$ ; existence et unicité de la partie polaire de  $R$  relative à un pôle  $a$ . Lorsque  $a$  est un pôle simple de  $R$ , expressions de la partie polaire relative à ce pôle.

Lorsque  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ , toute fraction rationnelle  $R$  est égale à la somme de sa partie entière et de ses parties polaires. Existence et unicité de la décomposition de  $R$  en éléments simples. Décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$ .

Les étudiants doivent connaître les relations

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X-a)^n}{n!} P^{(n)}(a),$$

$$P(a+X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} P^{(n)}(a).$$

Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines d'un polynôme n'est exigible des étudiants.

La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme.

Décomposition dans  $\mathbf{C}[X]$  de  $X^n - 1$ .

La définition des idéaux de  $\mathbf{K}[X]$  est hors programme.

Les étudiants doivent connaître l'algorithme donnant les coefficients de l'égalité de Bézout.

Pour la pratique de la décomposition en produit de facteurs irréductibles, le programme se limite au cas où  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Aucune connaissance spécifique sur l'irréductibilité sur  $\mathbf{Q}$  n'est exigible des étudiants.

Les étudiants doivent savoir calculer la partie polaire en un pôle double. En revanche, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies pour des pôles d'ordre supérieur ou égal à 3. La division des polynômes suivant les puissances croissantes est hors programme.

Aucune connaissance spécifique sur la décomposition en éléments simples sur un corps autre que  $\mathbf{C}$  n'est exigible des étudiants.

## 4- § Calcul matriciel

## a) Opérations sur les matrices

Espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes sur  $\mathbf{K}$ . Base canonique  $(E_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ ; dimension de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ . Isomorphisme canonique de  $\mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$  sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ . Définition du produit matriciel, bilinéarité.

Anneau  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  des matrices carrées à  $n$  lignes. Isomorphisme canonique de l'anneau  $\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$  sur l'anneau  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . Matrices carrées inversibles; définition du groupe linéaire  $GL_n(\mathbf{K})$ .

Transposée d'une matrice. Compatibilité avec les opérations algébriques sur les matrices.

Matrices carrées symétriques, antisymétriques.

Identification des matrices colonnes et des vecteurs de  $\mathbf{K}^n$ , des matrices lignes et des formes linéaires sur  $\mathbf{K}^p$ .

Écriture matricielle  $Y = MX$  de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur.

Sous-anneau des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures).

**MPSI**

**b) Matrices et applications linéaires**

Matrice  $M_{B,C}(u)$  associée à une application linéaire  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  muni d'une base  $B$  dans un espace vectoriel  $F$  muni d'une base  $C$ . L'application  $u \mapsto M_{B,C}(u)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{L}(E, F)$  sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ ; dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

Matrice  $M_B(u)$  associée à un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  muni d'une base  $B$ . L'application  $u \mapsto M_B(u)$  est un isomorphisme (linéaire) d'anneaux.

Matrice dans une base d'une famille finie de vecteurs, d'une famille finie de formes linéaires.

Matrice de passage d'une base  $B$  à une base  $B'$  d'un espace vectoriel  $E$ ; effet d'un changement de base(s) sur les coordonnées d'un vecteur, sur l'expression d'une forme linéaire, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.

La  $j$ -ième colonne de  $M_{B,C}(u)$  est constituée des coordonnées dans la base  $C$  de l'image par  $u$  du  $j$ -ième vecteur de la base  $B$ .

La matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$  est, par définition, la matrice de la famille  $B'$  dans la base  $B$  : sa  $j$ -ième colonne est constituée des coordonnées dans la base  $B$  du  $j$ -ième vecteur de la base  $B'$ . Cette matrice est aussi  $M_{B',B}(I_E)$ .

**c) Opérations élémentaires sur les matrices**

Opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice.

Interprétation des opérations élémentaires en termes de produits matriciels.

Application à l'inversion d'une matrice carrée par l'algorithme du pivot de Gauss.

Les opérations élémentaires sur les lignes sont les suivantes :

- addition d'un multiple d'une ligne à une autre (codage :  $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ );
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul (codage :  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ );
- échange de deux lignes (codage :  $L_i \leftrightarrow L_j$ ).

Cet algorithme permet en outre d'étudier l'inversibilité de la matrice.

**d) Rang d'une matrice**

Définition du rang d'une matrice (rang de l'application linéaire canoniquement associée, ou encore rang des vecteurs colonnes).

Une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  est de rang  $r$  si et seulement si elle est de la forme  $UJ_rV$  où  $U$  et  $V$  sont des matrices carrées inversibles. Invariance du rang par transposition.

Emploi des opérations élémentaires pour le calcul du rang d'une matrice.

Pour toute application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$ , le rang de  $u$  est égal au rang de  $M_{B,C}(u)$ , où  $B$  est une base de  $E$  et  $C$  une base de  $F$ .

La matrice  $J_r$  est l'élément  $(\alpha_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  défini par les relations :

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

**e) Systèmes d'équations linéaires**

Définition, système homogène associé; interprétations. Description de l'ensemble des solutions.

Rang d'un système linéaire. Dimension de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène.

Existence et unicité de la solution lorsque  $r = n = p$  (systèmes de Cramer). Résolution des systèmes de Cramer triangulaires. Algorithme du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes de Cramer.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation d'un système de  $n$  équations linéaires à  $p$  inconnues, à l'aide des vecteurs de  $\mathbf{K}^n$ , des formes linéaires sur  $\mathbf{K}^p$ , et d'une application linéaire de  $\mathbf{K}^p$  dans  $\mathbf{K}^n$  (ainsi que la traduction matricielle correspondante).

Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.

**5- Déterminants**

**a) Groupe symétrique**

Définition du groupe  $\mathfrak{S}_n$  des permutations de  $[1, n]$ ; cycles, transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions. Signature  $\varepsilon(\sigma)$  d'une permutation  $\sigma$ , signature d'une transposition.

## MPSI

L'application  $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$  est un morphisme de  $\mathfrak{S}_n$  dans le groupe multiplicatif  $\{-1, 1\}$ ; définition du sous-groupe alterné  $\mathfrak{A}_n$ .

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

### b) Applications multilinéaires

Définition d'une application  $n$ -linéaire, applications  $n$ -linéaires symétriques, antisymétriques, alternées.

Il convient de donner de nombreux exemples d'applications bilinéaires issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie. En revanche, l'étude générale des applications bilinéaires et multilinéaires est hors programme.

### c) Déterminant de $n$ vecteurs

Formes  $n$ -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension  $n$ . Déterminant de  $n$  vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension  $n$ . Caractérisation des bases. Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer.

La démonstration de l'existence et de l'unicité du déterminant n'est pas exigible des étudiants.

### d) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes; caractérisation des automorphismes.

Application à l'orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie; la donnée d'une base détermine une orientation. Bases directes d'un espace vectoriel orienté.

### e) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne; cofacteurs.

Relation  $M \cdot {}^t\text{Com } M = {}^t\text{Com } M \cdot M = (\text{Det } M) I_n$ ,

où  $\text{Com } M$  désigne la matrice des cofacteurs de  $M$ .

Expression de l'inverse d'une matrice carrée.

## III. ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

L'objectif est double :

- Refonder la théorie des espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 (bases orthonormales, supplémentaires orthogonaux) et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace (distances, angles).

- Développer les notions de base sur les automorphismes orthogonaux, les isométries et les similitudes.

Dans toute cette partie, le corps de base est  $\mathbf{R}$ .

### a) Produit scalaire

Produit scalaire  $(x, y) \mapsto (x|y)$  sur un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Inégalité de Cauchy-Schwarz; norme euclidienne, distance associée, inégalité triangulaire.

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Familles orthogonales, familles orthonormales; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

Relations entre produit scalaire et norme. Identité du parallélogramme. Identités de polarisation.

Définition d'un espace vectoriel euclidien.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation géométrique de ces relations.

Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

### b) Orthogonalité

§ Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

## MPSI

L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $F$  est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de  $F$ , et noté  $F^\perp$  ou  $F^\circ$ .

Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales, réflexions.

Distance à un sous-espace vectoriel. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Toute forme linéaire  $f$  s'écrit de manière unique sous la forme  $f(x) = (a|x)$ , où  $a$  est un vecteur.

Expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace muni d'une base orthonormale.

### c) Isométries affines du plan et de l'espace

Définition d'une isométrie du plan (resp. de l'espace). Applications affines. Exemples : translations, réflexions.

Étant donnés deux points distincts  $A$  et  $B$  du plan ou de l'espace, il existe une réflexion affine et une seule échangeant  $A$  et  $B$ .

Expression d'une isométrie comme composée de réflexions. Déplacements.

Image d'un barycentre par une application affine.

Toute isométrie est affine.

### d) Automorphismes orthogonaux du plan vectoriel euclidien

Définition d'un automorphisme orthogonal d'un plan euclidien  $E$  (c'est-à-dire un automorphisme de  $E$  conservant le produit scalaire). Caractérisation à l'aide de la conservation de la norme.

Définition du groupe orthogonal  $O(E)$ ; symétries orthogonales, réflexions.

Matrice d'un automorphisme orthogonal. Définition des matrices orthogonales et du groupe  $O(2)$ . Caractérisation des matrices orthogonales par leurs vecteurs colonnes.

Définition du groupe spécial orthogonal  $SO(E)$  (rotations), du groupe  $SO(2)$ .

Décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions.

Matrice dans une base orthonormale directe d'une rotation, mesure de l'angle d'une rotation; matrice de rotation  $R(\theta)$  associée à un nombre réel  $\theta$ ; morphisme  $\theta \mapsto R(\theta)$  de  $\mathbf{R}$  sur  $SO(2)$ .

Caractérisation d'un automorphisme orthogonal par l'image d'une (de toute) base orthonormale.

L'étude générale du groupe orthogonal est hors programme.

Caractérisation d'une rotation par l'image d'une (de toute) base orthonormale directe.

Si  $u$  est la rotation d'angle de mesure  $\theta$ , alors pour tout vecteur unitaire  $a$ ,

$$\cos \theta = (a | u(a)), \quad \sin \theta = \text{Det}(a, u(a)).$$

### e) Automorphismes orthogonaux de l'espace

Automorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3, groupe orthogonal  $O(E)$ , symétries orthogonales, réflexions. Matrices orthogonales, groupe  $O(3)$ . Définition du groupe des rotations  $SO(E)$ , du groupe  $SO(3)$ .

Axe et mesure de l'angle d'une rotation d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Étant donnée une rotation  $u$  d'axe dirigé par un vecteur unitaire  $a$  et d'angle de mesure  $\theta$  (modulo  $2\pi$ ), l'image d'un vecteur  $x$  orthogonal à l'axe est donnée par

$$u(x) = (\cos \theta) x + (\sin \theta) a \wedge x.$$

Il s'agit d'une brève extension à l'espace des notions déjà étudiées dans le cas du plan.

Étude de la décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions.

Les étudiants doivent savoir déterminer l'axe et la mesure de l'angle d'une rotation, ainsi que l'image d'un vecteur quelconque et la matrice associée à cette rotation.

En revanche, l'étude générale de la réduction des automorphismes orthogonaux de l'espace est hors programme.

### f) Déplacements

Définition d'un déplacement.

Tout déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation.

Tout déplacement de l'espace est soit une translation, soit une rotation, soit un vissage.

**MPSI****g) Similitudes directes du plan**

Définition d'une similitude (transformation affine multipliant les distances dans un rapport donné) ; rapport de similitude.

Définition d'une similitude directe. Homothéties de rapport non nul, translations, rotations. Écriture complexe d'une similitude directe. Centre et mesure de l'angle d'une similitude directe distincte d'une translation.

Étant donnés deux segments  $[AB]$  et  $[A'B']$  de longueur non nulle, il existe une similitude directe et une seule transformant  $A$  en  $A'$  et  $B$  en  $B'$ .

Les étudiants doivent connaître l'effet d'une similitude directe sur les angles orientés et les aires.

Les étudiants doivent savoir déterminer le rapport, la mesure de l'angle et le centre de cette similitude directe lorsqu'elle n'est pas une translation.