SECONDE ANNÉE

I - NOMBRES COMPLEXES ET POLYNÔMES

Exercices sur le programme de première année

II - ALGÈBRE LINÉAIRE

Les scalaires ne pourront être que les nombres réels ou les nombres complexes.
K désignera l'ensemble des nombres réels ou complexes.

A - Systèmes d'équations linéaires

Exercices sur le programme de première année.

B - Matrices

Exercices sur le programme de première année.

C - Espaces vectoriels

Le professeur choisit les démonstrations qu'il présente et les résultats qu'il admet.

Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs. Sous-espaces vectoriels. Les espaces vectoriels suivants doivent être connus : K^n, l'ensemble des applications définies sur un intervalle I à valeurs dans K, K[X], $K_n[X]$, l'ensemble des suites à éléments dans K, $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, les variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité (admis).	L'étude de $M_{n,p}(K)$ (dimension, base...) est hors programme.
Intersection de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une famille finie. Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces, sous-espaces supplémentaires. Famille génératrice finie. Famille libre finie. Famille liée finie. Bases et dimension des espaces vectoriels admettant une famille génératrice finie (résultats admis). Coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques de K^n et $K_n[X]$. Dans un espace vectoriel de dimension finie n : Toute famille libre a au plus n éléments. Une famille libre ayant n éléments est une base. Toute famille génératrice a au moins n éléments. Une famille génératrice ayant n éléments est une base. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la dimension de F est inférieure ou égale à la dimension de E. Si les deux dimensions sont égales, alors F = E. Caractérisation d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels par la dimension ou la juxtaposition des bases. Rang d'une famille finie de vecteurs.	On utilisera la notation vect(x_1, x_2,...x_k).

D - Applications linéaires

1) Définition d'une application linéaire, endomorphisme. Noyau, image. Lien avec : f injective, f surjective, f bijective, isomorphisme.	On observera que *L(E,F)* est un espace vectoriel, mais son étude (dimension, base,...) est hors programme.
Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations. Définition d'une projection sur un sous-espace vectoriel parallèlement à un autre.	La caractérisation par $p\circ p = p$ n'est pas au programme.
2) Cas de la dimension finie. Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base est une base. Si E et F ont même dimension et si f $\in$ *L(E,F)* il y a équivalence entre f injective, f surjective, f bijective. Relation : dim Ker f + dim Im f = dim E. Rang d'une application linéaire.	Tout espace de dimension n est isomorphe à K^n Relation admise.

3) Lien avec les matrices. Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel de dimension finie, une base ayant été choisie dans chacun d'eux. Rang d'une matrice. Rang d'un système linéaire. Rang de la transposée (résultat admis). Changement de base. Matrice de passage. Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur et sur la matrice d'un endomorphisme. Matrices semblables.	Les matrices équivalentes ne sont pas au programme.

E - Valeurs propres, vecteurs propres

Valeurs propres, vecteurs propres, d'un endomorphisme (ou d'une matrice carrée), sous-espaces propres.	Les polynômes caractéristiques sont hors programme.
Toute matrice carrée à cœfficients complexes possède au moins une valeur propre.	Résultat admis.
Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Une famille obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Endomorphisme (ou matrice carrée) diagonalisable.	
En dimension n, un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Application au calcul de la puissance nième de matrices diagonalisables.
Un endomorphisme (une matrice carrée) est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est la dimension de l'espace.	
Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable.	Résultat admis.

III - GÉOMÉTRIE

Exercices sur le programme de première année.

IV - FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Exercices sur le programme de première année.

V - CALCUL INTÉGRAL

A - Définition et propriétés

Exercices sur le programme de première année.

B - Procédés d'intégration

Exercices sur le programme de première année.

C - Intégrale généralisée

Cette rubrique est introduite en vue du calcul des probabilités. Au cours d'une épreuve de mathématiques, les intégrales généralisées ne pourront intervenir que dans un cadre probabiliste.

Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert, convergence, divergence. Théorème de comparaison pour deux fonctions positives f et g telles que f g. Convergence absolue d'une intégrale généralisée.	Tout autre critère de convergence est hors programme. Les intégrales semi-convergentes sont exclues du programme.

D - Équations différentielles à variable réelle

Exercices sur le programme de première année.

VI - SÉRIES

Cette rubrique est introduite en vue du calcul des probabilités. Au cours d'une épreuve de mathématiques, les séries ne pourront intervenir que dans un cadre probabiliste.

Convergence, divergence d'une série ; reste d'une série convergente.	
Convergence et calcul de la somme pour les séries géométriques, séries de terme général nq^n, n^2q^n, séries exponentielles.	La série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ est hors programme.
Théorème de comparaison pour deux séries à termes positifs telles que $u_n \leq v_n$, à partir d'un certain rang.	Tout autre critère de convergence est hors programme.
Convergence absolue d'une série à termes réels.	Les séries semi-convergentes sont exclues du programme. Les séries entières sont hors programme.

VII - FONCTIONS RÉELLES DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

On complète ici l'étude amorcée en première année. Le professeur est laissé juge des explications à donner, mais aucune démonstration n'est demandée. On se limitera au cas n 3.

A - Calcul différentiel

Limite, continuité d'une fonction de n variables.	Aucune question ne pourra être posée sur ce point.
Applications partielles, dérivées partielles d'ordre un et deux, interversion des dérivations. Pour une fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ et admettant des dérivées partielles : les dérivées partielles en un extremum s'annulent.	L'étude d'une réciproque est hors programme.
Pour une fonction f de classe C^1 $f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o,y_o) - (h \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o))$ est négligeable devant $\sqrt{h^2 + k^2}$ Notation différentielle. Définition du gradient (dimension 2 ou 3) ; calcul dans un repère orthonormal en coordonnées cartésiennes.	
Calcul des dérivées partielles d'une fonction composée de fonctions de classe C^1.	Les étudiants doivent savoir dériver f(x(t),y(t)) et f(x(u,v),y(u,v)).
Condition nécessaire pour que Pdx+Qdy+Rdz soit la différentielle d'une fonction (P, Q, R étant de classe C^1) ; la condition est suffisante sur un pavé.	

B - Calcul intégral

Calcul des intégrales doubles en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires. Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée. Ces intégrales ne pourront intervenir que dans un cadre probabiliste ou pour calculer des volumes. Les formules de changement de variables sont hors programme. Exemples motivés par la liaison avec les sciences physiques. Ils peuvent faire intervenir des intégrales simples ou doubles.

VIII - PROBABILITÉS

On aborde en deuxième année l'étude de variables aléatoires prenant une infinité de valeurs, discrètes ou admettant une densité (à l'exclusion de tout autre type). L'intérêt de ce nouveau type de modèle pour l'étude des phénomènes aléatoires sera souligné, on ne soulèvera aucune difficulté théorique sur les notions introduites dans cette rubrique.

A - Probabilité

Extension de la définition donnée en première année au cas où l'ensemble Ω est infini. Axiome de σ-additivité. Révision et extension à ce nouveau cadre des propriétés des probabilités et des probabilités conditionnelles vues en première année (VIII)B).	La notion de tribu et les résultats sur la probabilité d'une réunion (resp. intersection) croissante (resp.décroissante) sont hors programme. Résultats admis.

B - Variables aléatoires discrètes

Définition. Révision et extension à ce nouveau cadre des notions et propriétés vues en première année (VIII)C). Loi de Poisson. Espérance, variance. Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson. Approximation dans certains cas d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Loi géométrique : loi du nombre d'échecs précédant le premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre, ou loi du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès.	On se limitera au cas où l'ensemble des valeurs est fini ou inclus dans l'ensemble des entiers relatifs. Résultats admis.

Le B.O.
N° 3
26 JUIN
2003
HORS-SÉRIE

C - Densités de probabilité

On ne soulèvera aucune difficulté liée à l'apparition d'ensembles de mesure nulle, notion évidemment hors programme.

a) Variables aléatoires admettant une densité. Définition : fonctions de répartition et de densité. Lois usuelles : uniformes, normales (gaussiennes), exponentielles. Sur des exemples simples, recherche de la loi de Y = f(X), X ayant une densité connue.	On se limitera au cas où la fonction de répartition est continue partout et continûment dérivable sauf éventuellement en un nombre fini de points. L'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2/2)=\sqrt{2\pi}$ doit être connue des étudiants, mais sans justifications exigibles. On réalisera des applications numériques relatives à la loi normale. Pour la recherche de la loi de Y = f(X), on évitera des exemples inutilement compliqués comme la loi de sin(X), X uniforme sur $[-\pi/2, \pi]$.
b) Couple de variables aléatoires admettant une densité. Définition. Densités marginales et conditionnelles. Indépendance de n variables aléatoires. Généralisation des résultats vus en première année à ce sujet. Pour un couple admettant une densité, lien avec les densités marginales. Sur des exemples simples recherche de la loi de Z = f(X,Y), le couple (X,Y) ayant une densité connue. Cas particulier de la somme de deux variables indépendantes. Sommes de variables gaussiennes indépendantes.	Les étudiants doivent savoir utiliser le produit de convolution, dont la formule devra leur être rappelée en cas de besoin.
c) Espérances, variances, covariances et cœfficients de corrélation linéaire de variables à densité. Généralisation des définitions et des propriétés vues en première année.	

D - Théorèmes limite

Loi faible des grands nombres. Théorème de la limite centrée. Application à la loi binomiale, à la loi de Poisson.	On définira à cette occasion la notion de variable centrée et celle de variable réduite. On donnera deux énoncés pour le théorème de la limite centrée : si l'on a une suite de variables indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$ de même loi, admettant une espérance μ et une variance σ2, alors $$\forall a<b \quad P\left(a<\frac{\frac{X_1+.....+X_n}{n}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<b\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$ et on a un résultat analogue en remplaçant σ par $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2}{n}\right)^{1/2}$, où $\overline{X}_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$.