ANALYSE SPECTRALE : TRANSFORMATION EN Z

Ce module sera étudié en liaison étroite avec les enseignements des autres disciplines, notamment parce que le traitement numérique du signal et les techniques d'échantillonnage d'un signal analogique (traitement numérique, restitution analogique) évoluent très rapidement sous l'impulsion des nouvelles technologies.
Dans ce module, on se propose de familiariser les étudiants aux phénomènes discrets par la présentation de quelques signaux discrets et de leur transformation en Z, en se limitant à des signaux causaux. Cette présentation sera complétée par l'étude de la réponse à des signaux discrets, de filtres numériques régis par une équation aux différences linéaires à coefficients constants.
L'introduction des séries entières a pour seul but la présentation des résultats utiles pour l'étude de la transformation en Z.

a) Notions sur les séries entières

Application de la formule de Taylor avec reste intégral pour l'obtention de développements en séries entières (fonctions $t \mapsto \exp t$, $t \mapsto (1+t)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$).

La théorie générale des séries entières est hors programme. L'existence du rayon de convergence est admise.

b) Transformation en Z

Définition de la transformée en Z pour un signal causal :

$$(\mathscr{Z}x)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Transformée des signaux usuels :
$n \mapsto \quad n \mapsto d(n)$ ($d(0)$ et $d(n)$ 0 si $n \neq 0$) ;
$n \mapsto n \quad n \mapsto n^2 \quad n \mapsto a^n$ avec a réel non nul.

Linéarité de la transformation en Z.
Effet de la multiplication par a^n (a réel non nul).
Effet d'une translation sur la variable pour un signal causal.
Théorème de la valeur initiale pour un signal causal.
Théorème de la valeur finale (admis) pour un signal causal.

En liaison avec les enseignements d'autres disciplines, on pourra donner la définition de la transformée en Z pour un signal non causal :

$$(\mathscr{Z}x)(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } k \in \mathbb{Z};$$

mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

En relation avec les enseignements d'autres disciplines, on pourra donner la définition du produit de convolution, pour permettre de définir la notion de fonction de transfert d'un filtre discret, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

Travaux pratiques

1° Exemples simples de recherche de la transformée en Z d'un signal discret et de recherche d'un signal dont la transformée en Z est donnée.

On se limitera aux cas où le formulaire officiel permet de conclure.
Pour la recherche de l'original, on donnera des indications sur la méthode à utiliser, en particulier sur l'expression à décomposer en éléments simples.
En utilisant la division des polynômes, on peut écrire $(\mathscr{Z}x)(z)$ sous forme d'une série de puissances en z^{-n}. On remarquera donc qu'il est aisé de vérifier (ou d'obtenir) $x(n)$ pour les petites valeurs de n ; les moyens informatiques permettent de déterminer $x(n)$ pour d'autres valeurs de n.

2° Exemples d'emploi de la transformation en Z pour la résolution d'équations récurrentes du type
$a\,y(n) + b\,y(n-1) + c\,y(n-2) = a_1\,x(n) + b_1\,x(n-1)$ ou
$a\,y(n+2) + b\,y(n+1) + c\,y(n) = a_1\,x(n+1) + b_1\,x(n)$
où a, b, c, a_1, b_1 sont des nombres réels, où x est un signal causal discret connu et où y est un signal causal discret inconnu.

Pour la recherche de l'original, on se référera aux commentaires du TP1.
En liaison avec les enseignements d'autres disciplines, on pourra montrer sur des exemples simples comment certaines de ces équations s'interprètent en terme de "dérivation discrète et d'intégration discrète", mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.