Le B.O. N° 6 27 SEPT. 2001 HORS-SÉRIE

CALCUL DES PROBABILITES 2

Il s'agit d'une initiation aux phénomènes aléatoires où toute ambition théorique et toute technicité sont exclues.
L'objectif est que les étudiants sachent traiter quelques problèmes simples concernant des variables aléatoires dont la loi figure au programme. Les sciences et techniques industrielles et économiques fournissent un large éventail de tels problèmes, que l'on pourra étudier en liaison avec les enseignements des disciplines professionnelles.

a) Probabilités sur les ensembles finis. Vocabulaire des événements, probabilité. Probabilité conditionnelle, événements indépendants. Cas d'équiprobabilité.	L'ensemble des événements sera pris égal à l'ensemble de toutes les parties de Ω
Notation $n!$. Combinaisons.	Ces notions sont introduites pour présenter la loi binomiale. Les calculs de dénombrement ne sont pas un objectif du programme
Loi faible des grands nombres.	Il s'agit de faire comprendre aux étudiants le lien entre statistiques et probabilités. Une approche expérimentale et un énoncé rudimentaire suffisent.
b) Variables aléatoires discrètes à valeurs réelles Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance, écart type. Indépendance de deux variables aléatoires.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée sur les variables aléatoires. On pourra utiliser la notation Σ, mais aucune connaissance à son sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
Espérance mathématique de $aX+b$, de $X+Y$ et de $X-Y$; variance de $aX+b$, de $X+Y$ et de $X-Y$ dans le cas où X et Y sont indépendantes. Loi binomiale, loi de Poisson.	
c) Variables aléatoires continues à valeurs réelles Fonction de répartition et densité de probabilité. Espérance mathématique, variance, écart type. Loi normale.	L'exemple de la loi normale est suffisant. On pourra, en vue de l'étude de la fiabilité, présenter la loi exponentielle. On sera amené à utiliser les notations $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, mais aucune connaissance sur les intégrales impropres n'est exigible en calcul de probabilités
Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois normales : • les variables $aX+b$, $X+Y$ et $X-Y$ suivent des lois normales ;	Le résultat est admis.
• formules donnant l'espérance mathématique et la variance de $aX+b$, de $X+Y$ et de $X-Y$, dans le cas où X et Y sont indépendantes.	Les formules sont admises.
d) Théorème de la limite centrée : approximation par une loi normale de la somme de n variables indépendantes, de même loi et de variance finie. Distribution d'échantillonnage asymptotique de la moyenne et de la fréquence empirique.	
e) Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.	Les résultats sont admis, mais l'outil informatique peut permettre des approches expérimentales. Aucune connaissance sur les critères d'approximation n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques. Les étudiants doivent savoir déterminer les paramètres. Il conviendra de mettre en évidence la raison d'être de la correction de continuité lors de l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale ; toutes les indications seront fournies.

1° Calcul de probabilités portant sur l'union et sur l'intersection de deux événements.

2° Etude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi binomiale.

3° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi de Poisson.

4° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi normale.

Aucune connaissance sur l'interpolation affine avec la table de la loi normale centrée réduite n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

5° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi binomiale que l'on approche par une loi de Poisson ou une loi normale

STATISTIQUE INFÉRENTIELLE

Sous l'impulsion notamment du mouvement de la qualité, les méthodes statistiques sont aujourd'hui largement utilisées dans les milieux économique, social ou professionnel. Des procédures plus ou moins élaborées sont mises en œuvre, par exemple dans l'analyse des résultats d'expériences sur le vivant, les sondages, la maîtrise statistique des procédés, la fiabilité, les plans d'expériences. Des logiciels spécialisés exécutent automatiquement les calculs, suivant les normes AFNOR ou ISO.

Au-delà de l'exécution d'algorithmes ou de calculs dont le sens peut échapper, l'objectif essentiel de ce module est d'initier les étudiants, sur quelques cas simples, au raisonnement et méthodes statistiques et à l'interprétation des résultats obtenus.
Il s'agit de faire percevoir, à partir d'exemples figurant au programme, ce que sont les procédures de décision en univers aléatoire, ainsi que leur pertinence. Pour cela, la réalisation de simulations dans le cadre du modèle probabiliste de référence peut fournir un éclairage intéressant.
On soulignera que la validité d'une méthode statistique est liée à l'adéquation entre la réalité et le modèle la représentant.
On évitera les situations artificielles et on privilégiera les exemples issus de la vie économique et sociale ou du domaine professionnel, en liaison avec les enseignements d'autres disciplines ; dans le cadre de cette liaison, on pourra donner quelques exemples d'autres procédures que celles figurant au programme de mathématiques (par exemple utilisation de la droite de Henry, du test du χ^2 de la loi de Student), en privilégiant les aspects qualitatifs, mais aucune connaissance à leur sujet n'est exigible dans le cadre de ce programme.
On se placera dans le cadre d'échantillons considérés comme réalisations de variables aléatoires indépendantes.

a) Estimation ponctuelle d'un paramètre :
- fréquence ,
- moyenne et écart type.

Une illustration qualitative succincte des notions de biais et de convergence d'un estimateur peut être proposée, mais toute étude mathématique de ces qualités est hors programme.

b) Estimation par un intervalle de confiance d'un paramètre :
- fréquence dans le cas d'une loi binomiale approximable par une loi normale ;
- moyenne, dans le cas d'une loi normale quand son écart type est connu ou dans le cas de grands échantillons.

On distinguera confiance et probabilité :
- avant le tirage d'un échantillon, la procédure d'obtention de l'intervalle de confiance a une <u>probabilité</u> $1-\alpha$ que cet intervalle contienne le paramètre inconnu,
- après le tirage, le paramètre est dans l'intervalle calculé avec une <u>confiance</u> $1-\alpha$.

c) Tests d'hypothèse :
- relatifs à une fréquence p, dans le cas d'une loi binomiale approximable par une loi normale,
  tester $p=p_0$ contre $p>p_0$, contre $p<p_0$
  tester $p=p_0$ contre $p\neq p_0$;
- relatifs à une moyenne m, dans le cas de la loi normale,
  tester $m=m_0$ contre $m>m_0$, contre $m<m_0$;
  tester $m=m_0$ contre $m\neq m_0$;
- comparaison de deux proportions ou de deux moyennes.

La taille n de l'échantillon sera suffisamment grande ($n \geq 30$).
On soulignera que la décision prise, rejet ou acceptation, dépend des choix faits *a priori* par l'utilisateur : choix de l'hypothèse nulle, choix du seuil de signification.