ANALYSE DES PHENOMENES EXPONENTIELS

1° Fonctions d'une variable réelle

On se place dans le cadre des fonctions à valeurs réelles, définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, qui servent à modéliser mathématiquement des "phénomènes continus". Les étudiants devront savoir traiter les situations qui se prêtent à une telle modélisation.
On consolidera les acquis sur les fonctions en tenant compte, notamment sur les limites, des programmes de mathématiques suivis antérieurement par les étudiants.
Ce paragraphe énumère les fonctions intervenant notamment en calcul différentiel et intégral.

Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles (fonctions en escalier, fonctions affines par morceaux, fonction exponentielle $t \mapsto \exp t$ ou $t \mapsto e^t$, fonction logarithme népérien $t \mapsto \ln t$, fonctions puissances $t \mapsto t^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$) et à celles qui s'en déduisent de façon simple par opérations algébriques ou par composition.

Comparaison des fonctions exponentielle, puissances et logarithme au voisinage de $+\infty$.

Les représentations graphiques doivent jouer un rôle important.

On pourra en particulier étudier des fonctions du type $t \mapsto \dfrac{A}{1+e^{a-bt}}$ utilisées pour modéliser certains phénomènes économiques.

2° Calcul différentiel et intégral

Il n'y a pas lieu de reprendre la présentation des concepts de dérivée et d'intégrale, et aucune difficulté théorique ne doit être soulevée à ce sujet. L'interprétation géométrique du nombre dérivé en un point doit être connue des étudiants et la notion de coût marginal sera interprétée en termes de dérivation.
On consolidera et on approfondira les acquis de terminale technologique sur la pratique du calcul des dérivées et des primitives.
Dans le cas de deux variables t et x liées par une relation fonctionnelle $x = f(t)$, on introduira la notation différentielle $df = f'(t)\,dt$; on donnera son interprétation graphique et on montrera l'intérêt de la différentielle pour les problèmes d'approximation. Aucune difficulté ne doit être soulevée sur le statut mathématique de la notion de différentielle.
Pour l'intégration, on se limitera, comme en terminale technologique, au cas de fonctions dérivables. Aucune théorie de la notion d'aire n'est au programme ; on admettra son existence et ses propriétés élémentaires.

a) Dérivées et intégrales

- Étant donné un point a de I et une fonction f dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro au point a.

Propriétés de l'intégrale :

Relation de Chasles.
Linéarité.
Positivité : si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$;
intégration d'une inégalité.
Inégalité de la moyenne : si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.

Il conviendra d'interpréter, chaque fois qu'il est possible, ces propriétés en termes d'aire.

Intégration par parties.

Intégration par changement de variable du type $t \mapsto t + b$ ou $t \mapsto at$.

Tout autre changement de variable est hors programme.

Exemples d'emploi du calcul intégral pour l'obtention de majorations et d'encadrements.

On se limitera à des exemples très simples et des indications pour l'encadrement de la fonction à intégrer devront être fournies.

b) Équations différentielles.

On s'attachera à relier les exemples étudiés avec les enseignements de l'économie en faisant ressortir l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale.

Résolution des équations linéaires du premier ordre à coefficients constants $a\,x'(t) + b\,x(t) = c(t)$ où a et b sont des réels et c une fonction dérivable à valeurs réelles.	

c) Notions sur les fonctions numériques de deux variables.

Aucune connaissance sur ce paragraphe n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques ; les notions qu'il contient sont à étudier en liaison étroite avec l'enseignement de l'économie et de la gestion. Elles portent principalement sur le calcul de dérivées partielles et de la dérivée d'une fonction définie par une équation implicite $f(x, y) = 0$. On donnera aussi la notation différentielle et son interprétation en termes d'effet sur la valeur d'une fonction de petits accroissements des variables.

3° Suites arithmétiques et suites géométriques

Les suites arithmétiques et les suites géométriques sont des outils indispensables pour l'étude de nombreux phénomènes discrets intervenant en économie et c'est à ce titre qu'elles font l'objet d'une consolidation des acquis et d'un approfondissement. Les suites considérées sont définies pour tout entier naturel.

Limite d'une suite géométrique (k^n), où k est strictement positif.	Les énoncés concernant les opérations algébriques étant entièrement analogues pour les suites et les fonctions, il n'y a pas lieu de s'attarder au cas des suites ; ainsi, par exemple, on déduit immédiatement la limite d'une suite $(a k^n + b)$, où a, b et k sont des constantes ($k > 0$), de la limite de la suite (k^n). Il s'agit, sans soulever de difficulté théorique, de pouvoir étudier et comparer, sur certains modèles mathématiques, la tendance à long terme d'un phénomène.

Travaux pratiques

1° Exemples d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude du sens de variation et le tracé des représentations graphiques des fonctions.	Les exemples seront issus, le plus souvent possible, de l'étude de phénomènes rencontrés en économie. On se limitera aux situations qui se ramènent au cas des fonctions d'une seule variable. Pour la détermination d'une fonction, on pourra être amené à résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. Il convient de ne pas abuser des problèmes centrés sur l'étude traditionnelle de fonctions définies par une formule donnée *a priori*, dont on demande de tracer la courbe représentative. "Toute étude de branche infinie, notamment la mise en évidence d'asymptote, devra comporter des indications sur la méthode à suivre."
2° Exemples de recherche par approximation des solutions d'une équation numérique.	Sur des exemples, on mettra en œuvre quelques méthodes classiques : dichotomie, méthode de la corde (Lagrange), méthode de la tangente (Newton) Aucune connaissance spécifique sur celles-ci n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
3° Exemples de calcul d'intégrales à l'aide de primitives.	Les étudiants doivent savoir reconnaître si un exemple donné de fonction est de l'une des formes figurant au programme. Mis à part le cas de primitives de la forme précédente, tout calcul de primitive devra comporter des indications sur la méthode à suivre. On pourra montrer l'intérêt d'exploiter les propriétés des fonctions périodiques, des fonctions paires et des fonctions impaires.
4° Exemples de résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre.	Dans le cas d'un second membre non nul, toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière seront données. On insistera sur les exemples intervenant en économie et en démographie, et notamment sur le cas des phénomènes exponentiels continus, décrits par une équation du type $y' = ay$, où a est constant.
5° Exemples d'étude de situations conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques.	On privilégiera les situations issues de la vie économique et sociale. En liaison avec l'économie et la gestion, on pourra être amené à étudier des situations conduisant à des suites définies par leur premier terme et une relation du type $u_{n+1} = au_n + b$; mais toutes les indications utiles devront être fournies pour se ramener à l'étude d'une suite géométrique.