CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL 3

Le programme se place dans le cadre de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Il n'y a pas lieu de reprendre la présentation des concepts de dérivée et d'intégrale, et aucune difficulté théorique ne doit être soulevée à ce sujet. Les interprétations géométrique et cinématique de la dérivée en un point doivent être connues.
On consolidera et on approfondira les acquis de terminale technologique sur la pratique du calcul des dérivées et des primitives.
Dans le cas de deux variables t et x liées par une relation fonctionnelle $x = f(t)$ on introduira la notation différentielle $dx = f'(t)dt$; on donnera son interprétation graphique et on montrera l'intérêt de la différentielle pour les problèmes d'approximation. Aucune difficulté ne doit être soulevée sur le statut mathématique de la notion de différentielle.
L'étude de la continuité ne constitue pas un objectif en soi ; toutefois, on sera amené à donner une interprétation graphique de cette propriété et à l'illustrer par des exemples et des contre-exemples simples.
Pour l'intégration, on se limitera au cas de fonctions continues par morceaux.
Aucune théorie de la notion d'aire n'est au programme ; on admettra son existence et ses propriétés élémentaires.
Les exemples de calculs d'approximation cités dans le programme n'ont d'autre but que d'exercer les étudiants à mettre en œuvre sur des exemples simples, une démarche algorithmique qui puisse être facilement interprétée graphiquement.

a) Étant donné un point a de I et une fonction f continue sur I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro au point a.

Propriétés de l'intégrale :

- Relation de Chasles.
- Linéarité.
- Positivité : si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$;

intégration d'une inégalité ;

inégalité $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$

- Inégalité de la moyenne : si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$,

alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$;

de même, si $a \leq b$ et si $|f| \leq k$, alors $\int_a^b |f(t)|\,dt \leq k(b-a)$

- Inégalité des accroissements finis :

si $a \leq b$ et si $|f'| \leq k$, alors $|f(b) - f(a)| \leq k(b-a)$

Il convient d'interpréter, chaque fois qu'il est possible, les propriétés de l'intégrale en termes d'aires.

Les théorèmes d'existence (théorème de Rolle, formule des accroissements finis) et la formule de Taylor sont hors programme.

b) Intégration par parties.

c) Intégration par changement de variable.

On s'appuiera sur les exemples $t \mapsto t + b$ et $t \mapsto at$, où a et b sont des nombres réels, qui donnent lieu à une interprétation graphique, pour présenter sans justification théorique d'autres cas de changement de variable. Dans ces cas on soulignera l'intérêt de la notation différentielle.

d) Formule de Taylor avec reste intégral. Majoration du reste, inégalité de Taylor Lagrange.
Application à l'obtention, au voisinage de 0, des développements limités des fonctions usuelles : $t \mapsto \exp t$, $t \mapsto \ln(1+t)$, $t \mapsto (1+t)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$.

Le résultat, démontré pour la fonction exponentielle, pourra être admis pour les autres fonctions.

e) Dérivée et primitives d'une fonction à valeurs complexes.

On se contentera de donner les définitions et quelques exemples, en particulier celui des fonctions $t \mapsto e^{at}$, avec $a \in \mathbb{C}$.

Travaux pratiques

1° Exemples d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude du sens de variation et le tracé des représentations graphiques des fonctions.	Les exemples seront issus, le plus souvent possible, de l'étude de phénomènes rencontrés en sciences physiques, en biologie ou en technologie. On se limitera aux situations qui se ramènent au cas des fonctions d'une seule variable. Pour la détermination d'une fonction, on pourra être amené à résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. Il convient de ne pas abuser des problèmes centrés sur l'étude traditionnelle de fonctions définies par une formule donnée *a priori*, dont on demande de tracer la courbe représentative. Toute étude sur le comportement asymptotique d'une fonction devra comporter des indications sur la méthode à suivre.
2° Exemples de tracé de courbes planes définies par une représentation paramétrique $t \mapsto f(t)+\mathrm{i}\,g(t)$ ou $t \mapsto F(t) = r(t)\exp(\mathrm{i}\,\varphi(t))$, où $r(t)>0$	On privilégiera les exemples liés aux autres enseignements (mouvement d'un point, signaux électriques, modélisation géométrique….). L'objectif ici est la gestion conjointe de deux tableaux de variation : dans un cas, de f et de g, dans l'autre de r et de φ. Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente en un point où le vecteur dérivé n'est pas nul. Aucune connaissance sur l'étude des points singuliers et des branches infinies n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques. L'étude des courbes définies par une équation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est hors programme.
3° Exemples simples d'emploi des développements limités pour l'étude locale des fonctions.	Les étudiants doivent savoir utiliser, sur des exemples simples de développements limités, les opérations addition, multiplication et intégration. Pour les autres opérations (quotient, composition), des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies.
4° Exemples de recherche des solutions d'une équation numérique, et de mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'une solution à l'aide de suites.	Sur des exemples, on mettra en œuvre quelques méthodes classiques : dichotomie, méthode de la corde (Lagrange), méthode de la tangente (Newton). Aucune connaissance sur celles-ci n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
5° Calcul d'une primitive figurant au formulaire officiel ou s'en déduisant par un changement de variable	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée dans le cas de l'intégration par changement de variable. Les changements de variable autres que $t \mapsto t+b$ ou $t \mapsto at$ seront donnés. Les étudiants doivent savoir utiliser dans le calcul intégral les propriétés des fonctions périodiques, des fonctions paires et des fonctions impaires.
6° Calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle dans le cas de pôles simples.	Dans le cas où il y a des pôles multiples, des indications doivent être données sur la méthode à suivre.
7° Calcul d'une primitive d'une fonction exponentielle-polynôme (de la forme $t \mapsto e^{at}P(t)$, où a est un nombre complexe et où P est un polynôme).	Les étudiants doivent savoir traiter les cas qui s'y ramènent simplement par linéarisation.
8° Exemples de calcul d'intégrales.	Tout excès de technicité est à éviter pour le calcul des primitives.
9° Exemples de calculs d'aires, de volumes, de valeurs moyennes, de valeurs efficaces.	On pourra aussi, selon la spécialité, proposer des exemples de détermination de centres d'inertie et de calcul de moments d'inertie.
10° Exemples de mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'une intégrale.	L'objectif est de familiariser les étudiants à un certain savoir faire concernant quelques méthodes élémentaires (point-milieu, trapèzes, Simpson), mais aucune connaissance sur ces méthodes n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.