SERIES NUMERIQUES ET SERIES DE FOURIER

L'étude de séries numériques très simples, préalable à l'étude des séries de Fourier, a pour objectif de permettre aux étudiants de se familiariser avec les "sommes infinies" et la notation Σ. La plupart des résultats relatifs aux séries numériques pourront être admis et ne feront l'objet d'aucun développement théorique.
La décomposition de signaux périodiques en séries de Fourier est un outil indispensable pour l'étude des phénomènes vibratoires en électricité, en optique ou en mécanique.

Séries numériques

a) Définition de la convergence d'une série à termes réels.
Convergence des séries géométriques

L'étude des sommes partielles d'une suite géométrique permet d'introduire la convergence et la divergence des séries numériques.

b) Séries à termes positifs.
Convergence des séries de Riemann.
Comparaison de deux séries dans le cas où $u_n \leq v_n$.
Comparaison de deux séries dans le cas où $u_n \sim v_n$.

La définition de deux suites équivalentes sera introduite à cette occasion mais cette notion ne fera l'objet d'aucun développement théorique.

Règle de d'Alembert.

c) Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0.

d) Séries absolument convergentes.

Il s'agit d'une simple introduction. Tout développement théorique est hors programme.

Séries de Fourier

a) Coefficients de Fourier d'une fonction T-périodique continue par morceaux et série de Fourier d'une telle fonction. Forme en $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$ et forme exponentielle $\exp(in\omega t)$.

En liaison avec l'enseignement des sciences physiques, il conviendra de mettre en valeur le lien entre ces notions et l'étude des signaux : composantes d'un signal dans une fréquence donnée, reconstitution du signal à partir de ses composantes.

b) Convergence (admise) lorsque f est de classe C1 par morceaux (conditions de Dirichlet).

c) Formule de Parseval (admise) donnant $\int_0^T |f(t)|^2 \, dt$ en fonction des coefficients de Fourier, lorsque f est continue par morceaux.

La formule de Parseval est à mettre en relation avec le calcul de l'énergie à partir des composantes.

Travaux pratiques

1° Exemples simples d'étude de séries numériques.

Tout excès de technicité est à éviter.

2° Recherche de développements en série de Fourier de fonctions périodiques.

On se limitera à des exemples simples et on exploitera des situations issues de l'électricité, de l'électronique ou de la mécanique.
Aucune difficulté ne doit être soulevée sur la convergence des séries de Fourier en dehors des hypothèses indiquées par le programme.
Toutes les indications utiles pour la vérification des conditions de Dirichlet seront données.

3° Utilisation du développement en série de Fourier d'une fonction périodique pour calculer la somme d'une série numérique.

ANALYSE SPECTRALE : TRANSFORMATION DE LAPLACE

Ce module sera étudié en liaison étroite avec les enseignements des autres disciplines.

Le programme se borne à la transformation de Laplace des fonctions nulles sur $]-\infty, 0[$ (fonctions causales). Dans le cas d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, on transforme donc la fonction $t \mapsto \mathcal{U}(t) f(t)$, où $\mathcal{U}$ désigne l'échelon unité.

On s'intéressera essentiellement aux combinaisons linéaires à coefficients réels ou complexes de fonctions de la forme $t \mapsto \mathcal{U}(t-\alpha) t^n e^{rt}$, où α est un réel positif, n un entier positif et r un nombre complexe.

a) Transformation de Laplace :

On donnera quelques notions sur les intégrales impropres, en particulier sur la convergence d'une intégrale de la forme

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

L'étude de la convergence des intégrales impropres données *a priori* n'est pas un objectif de la formation.

Définition de la transformation de Laplace :

$$(\mathcal{L}f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt \text{, où } p \in \mathbb{R}.$$

Linéarité.

Transformée de Laplace d'une dérivée et d'une primitive.

Effet d'une translation ou d'un changement d'échelle sur la variable.

Effet de la multiplication par e^{-at}

Transformée de Laplace des fonctions constantes et des fonctions exponentielles $t \mapsto e^{at}$, où $a \in \mathbb{C}$.

Dérivée d'une transformée de Laplace (admis).

Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale (admis).

En relation avec l'enseignement de l'électronique et de la régulation, on indiquera

que les propriétés de la transformation de Laplace s'étendent au cas où p est complexe ;

comment l'impulsion unité δ peut être considérée comme obtenue par passage à la limite de fonctions (f_n), et qu'en étudiant la limite de $(\mathcal{L}f_n)$ on est amené à dire que $(\mathcal{L}\delta) = 1$.

Toutefois, aucune connaissance sur ces points n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

b) Calcul opérationnel :

Approche des notions de fonctions de transfert et de calcul opérationnel.

Les seules connaissances exigibles sur le calcul opérationnel portent sur le cas des fonctions rationnelles, combinées avec un facteur de retard éventuel.

Sur ces exemples, on pourra mettre en évidence l'importance de la notion de stabilité, mais les critères généraux de stabilité sont hors programme.

Travaux pratiques

Recherche de la transformée de Laplace d'une fonction donnée ou recherche d'une fonction dont la transformée de Laplace est donnée.	On se limitera au cas où les fonctions données ou recherchées sont des combinaisons linéaires à coefficients réels ou complexes de fonctions de la forme $t \mapsto \mathcal{U}(t-\alpha)\, t^n\, e^{rt}$, où α est un nombre réel positif, n un nombre entier positif et r un nombre complexe. On habituera les étudiants à utiliser des transformations géométriques simples (translation, symétrie orthogonale) et des propriétés figurant dans le formulaire pour obtenir sans calcul la transformée d'une fonction donnée ou rechercher une fonction dont la transformée de Laplace est donnée.
2° Résolution à l'aide de la transformation de Laplace des équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.	On se limitera pour le second membre aux fonctions du TP 1. On insistera sur des exemples où la transformée de Laplace présente un intérêt, par exemple lorsque le second membre est $t \mapsto (t+1)\mathcal{U}(t) - t\,\mathcal{U}(t-1)$; en revanche il est parfois peu judicieux de l'utiliser lorsque le second membre est, par exemple, la fonction $t \mapsto (t+1)\mathcal{U}(t)$
3° Exemples d'emploi de la transformation de Laplace pour la résolution de systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants	On se limitera pour le second membre aux fonctions exponentielles-polynômes $t \mapsto e^{at} P(t)$ où $a \in \mathbb{C}$
4° Exemples d'emploi de la transformation de Laplace pour la résolution d'équations différentielles du type $ay'(t) + by(t) + c\int_0^t y(u)\,du = f(t)$ où a, b et c sont des constantes réelles.	On se limitera pour le second membre aux fonctions du TP1. Dans le cas où $a = 0$, on fera remarquer que $t \mapsto y(t)$ peut présenter des discontinuités.

ANALYSE SPECTRALE : TRANSFORMATION EN Z

Ce module sera étudié en liaison étroite avec les enseignements des autres disciplines, notamment parce que le traitement numérique du signal et les techniques d'échantillonnage d'un signal analogique (traitement numérique, restitution analogique) évoluent très rapidement sous l'impulsion des nouvelles technologies.
Dans ce module, on se propose de familiariser les étudiants aux phénomènes discrets par la présentation de quelques signaux discrets et de leur transformation en Z, en se limitant à des signaux causaux. Cette présentation sera complétée par l'étude de la réponse à des signaux discrets, de filtres numériques régis par une équation aux différences linéaires à coefficients constants.
L'introduction des séries entières a pour seul but la présentation des résultats utiles pour l'étude de la transformation en Z.

a) Notions sur les séries entières

Application de la formule de Taylor avec reste intégral pour l'obtention de développements en séries entières (fonctions $t \mapsto \exp t$, $t \mapsto (1+t)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$).

La théorie générale des séries entières est hors programme.
L'existence du rayon de convergence est admise.

b) Transformation en Z

Définition de la transformée en Z pour un signal causal :

$$(\mathcal{Z}x)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Transformée des signaux usuels :
$n \mapsto$ $a \mapsto d(n)$ $(d(0)$ et $d(n)$ 0 si $n \neq 0)$;
$n \mapsto n$ $n \mapsto n^2$ $n \mapsto a^n$ avec a réel non nul.

En liaison avec les enseignements d'autres disciplines, on pourra donner la définition de la transformée en Z pour un signal non causal :

$$(\mathcal{Z}x)(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } k \in \mathbb{Z} ;$$

mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

Linéarité de la transformation en Z.
Effet de la multiplication par a^n (a réel non nul).
Effet d'une translation sur la variable pour un signal causal.
Théorème de la valeur initiale pour un signal causal.
Théorème de la valeur finale (admis) pour un signal causal.

En relation avec les enseignements d'autres disciplines, on pourra donner la définition du produit de convolution, pour permettre de définir la notion de fonction de transfert d'un filtre discret, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

Travaux pratiques

1° Exemples simples de recherche de la transformée en Z d'un signal discret et de recherche d'un signal dont la transformée en Z est donnée.

On se limitera aux cas où le formulaire officiel permet de conclure.
Pour la recherche de l'original, on donnera des indications sur la méthode à utiliser, en particulier sur l'expression à décomposer en éléments simples.
En utilisant la division des polynômes, on peut écrire $(\mathcal{Z}x)(z)$ sous forme d'une série de puissances en z^{-n}. On remarquera donc qu'il est aisé de vérifier (ou d'obtenir) $x(n)$ pour les petites valeurs de n ; les moyens informatiques permettent de déterminer $x(n)$ pour d'autres valeurs de n.

2° Exemples d'emploi de la transformation en Z pour la résolution d'équations récurrentes du type
$a\,y(n) + b\,y(n-1) + c\,y(n-2) = a_1\,x(n) + b_1\,x(n-1)$ ou
$a\,y(n+2) + b\,y(n+1) + c\,y(n) = a_1\,x(n+1) + b_1\,x(n)$
où a, b, c, a_1, b_1 sont des nombres réels, où x est un signal causal discret connu et où y est un signal causal discret inconnu.

Pour la recherche de l'original, on se référera aux commentaires du TP1.
En liaison avec les enseignements d'autres disciplines, on pourra montrer sur des exemples simples comment certaines de ces équations s'interprètent en terme de "dérivation discrète et d'intégration discrète", mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

On s'attachera à relier les exemples étudiés avec les enseignements de physique, mécanique et technologie, en faisant saisir l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale, et en faisant ressortir la signification ou l'importance de certains paramètres ou phénomènes : stabilité, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance,...

a) Résolution des équations linéaires du premier ordre $a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$	On se placera dans le cas où a, b, c sont des fonctions dérivables à valeurs réelles et on cherchera les solutions sur un intervalle où a ne s'annule pas.
b) Résolution des équations linéaires du second ordre à coefficients réels constants, dont le second membre est une fonction exponentielle-polynôme $t \mapsto e^{at}P(t)$, où $a \in \mathbb{C}$.	

Travaux pratiques

1° Résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre. 2° Résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre.	Pour les TP 1° et 2° : - il s'agit uniquement d'équations différentielles dont le type est précisé ci-dessus ; - toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière seront données.
3° Exemples simples de résolution d'équations différentielles non linéaires, du premier ordre à variables séparables	On privilégiera les exemples issus de la cinétique chimique. Aucune connaissance sur ce TP n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques

FONCTIONS DE DEUX OU TROIS VARIABLES RÉELLES

Aucune connaissance sur ce module n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques ; les notions qu'il contient sont à étudier en liaison étroite avec l'enseignement de la physique, de la mécanique, de la technologie ou de l'économie.

a) Calcul de dérivées partielles. Calcul de la dérivée d'une fonction définie par une équation implicite $f(x, y) = 0$.	On donnera aussi la notation différentielle et son interprétation en termes d'effet sur la valeur d'une fonction de petits accroissements des variables.
b) Brèves notions sur le gradient et le laplacien d'une fonction de trois variables, la divergence et le rotationnel d'un champ de vecteurs (en dimension trois).	Ces notions interviennent en particulier en thermodynamique.
c) Exemples très simples de calcul d'intégrales doubles et triples en coordonnées cartésiennes ou cylindriques, éventuellement sphériques.	On admettra tous les résultats utiles.

ANALYSE DES PHENOMENES EXPONENTIELS

1° Fonctions d'une variable réelle

On se place dans le cadre des fonctions à valeurs réelles, définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, qui servent à modéliser mathématiquement des "phénomènes continus". Les étudiants devront savoir traiter les situations qui se prêtent à une telle modélisation.
On consolidera les acquis sur les fonctions en tenant compte, notamment sur les limites, des programmes de mathématiques suivis antérieurement par les étudiants.
Ce paragraphe énumère les fonctions intervenant notamment en calcul différentiel et intégral.

Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles (fonctions en escalier, fonctions affines par morceaux, fonction exponentielle $t \mapsto \exp t$ ou $t \mapsto e^t$, fonction logarithme népérien $t \mapsto \ln t$, fonctions puissances $t \mapsto t^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$) et à celles qui s'en déduisent de façon simple par opérations algébriques ou par composition.

Comparaison des fonctions exponentielle, puissances et logarithme au voisinage de $+\infty$.

Les représentations graphiques doivent jouer un rôle important.

On pourra en particulier étudier des fonctions du type $t \mapsto \dfrac{A}{1+e^{a-bt}}$ utilisées pour modéliser certains phénomènes économiques.

2° Calcul différentiel et intégral

Il n'y a pas lieu de reprendre la présentation des concepts de dérivée et d'intégrale, et aucune difficulté théorique ne doit être soulevée à ce sujet. L'interprétation géométrique du nombre dérivé en un point doit être connue des étudiants et la notion de coût marginal sera interprétée en termes de dérivation.
On consolidera et on approfondira les acquis de terminale technologique sur la pratique du calcul des dérivées et des primitives.
Dans le cas de deux variables t et x liées par une relation fonctionnelle $x = f(t)$, on introduira la notation différentielle $df = f'(t)\,dt$; on donnera son interprétation graphique et on montrera l'intérêt de la différentielle pour les problèmes d'approximation. Aucune difficulté ne doit être soulevée sur le statut mathématique de la notion de différentielle.
Pour l'intégration, on se limitera, comme en terminale technologique, au cas de fonctions dérivables. Aucune théorie de la notion d'aire n'est au programme ; on admettra son existence et ses propriétés élémentaires.

a) Dérivées et intégrales

- Étant donné un point a de I et une fonction f dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro au point a.

Propriétés de l'intégrale :

Relation de Chasles.
Linéarité.

Positivité : si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$;

intégration d'une inégalité.

Inégalité de la moyenne : si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.

Il conviendra d'interpréter, chaque fois qu'il est possible, ces propriétés en termes d'aire.

Intégration par parties.

Intégration par changement de variable du type $t \mapsto t + b$ ou $t \mapsto at$.

Tout autre changement de variable est hors programme.

Exemples d'emploi du calcul intégral pour l'obtention de majorations et d'encadrements.

On se limitera à des exemples très simples et des indications pour l'encadrement de la fonction à intégrer devront être fournies.

b) Équations différentielles.

On s'attachera à relier les exemples étudiés avec les enseignements de l'économie en faisant ressortir l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale.

Résolution des équations linéaires du premier ordre à coefficients constants $a\,x'(t) + b\,x(t) = c(t)$ où a et b sont des réels et c une fonction dérivable à valeurs réelles.	

c) Notions sur les fonctions numériques de deux variables.

Aucune connaissance sur ce paragraphe n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques ; les notions qu'il contient sont à étudier en liaison étroite avec l'enseignement de l'économie et de la gestion. Elles portent principalement sur le calcul de dérivées partielles et de la dérivée d'une fonction définie par une équation implicite $f(x, y) = 0$. On donnera aussi la notation différentielle et son interprétation en termes d'effet sur la valeur d'une fonction de petits accroissements des variables.

3° Suites arithmétiques et suites géométriques

Les suites arithmétiques et les suites géométriques sont des outils indispensables pour l'étude de nombreux phénomènes discrets intervenant en économie et c'est à ce titre qu'elles font l'objet d'une consolidation des acquis et d'un approfondissement. Les suites considérées sont définies pour tout entier naturel.

Limite d'une suite géométrique $\left(k^n\right)$, où k est strictement positif.	Les énoncés concernant les opérations algébriques étant entièrement analogues pour les suites et les fonctions, il n'y a pas lieu de s'attarder au cas des suites ; ainsi, par exemple, on déduit immédiatement la limite d'une suite $\left(a k^n + b\right)$, où a, b et k sont des constantes ($k > 0$), de la limite de la suite $\left(k^n\right)$. Il s'agit, sans soulever de difficulté théorique, de pouvoir étudier et comparer, sur certains modèles mathématiques, la tendance à long terme d'un phénomène.

Travaux pratiques

1° Exemples d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude du sens de variation et le tracé des représentations graphiques des fonctions.	Les exemples seront issus, le plus souvent possible, de l'étude de phénomènes rencontrés en économie. On se limitera aux situations qui se ramènent au cas des fonctions d'une seule variable. Pour la détermination d'une fonction, on pourra être amené à résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. Il convient de ne pas abuser des problèmes centrés sur l'étude traditionnelle de fonctions définies par une formule donnée *a priori*, dont on demande de tracer la courbe représentative. "Toute étude de branche infinie, notamment la mise en évidence d'asymptote, devra comporter des indications sur la méthode à suivre."
2° Exemples de recherche par approximation des solutions d'une équation numérique.	Sur des exemples, on mettra en œuvre quelques méthodes classiques : dichotomie, méthode de la corde (Lagrange), méthode de la tangente (Newton). Aucune connaissance spécifique sur celles-ci n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
3° Exemples de calcul d'intégrales à l'aide de primitives.	Les étudiants doivent savoir reconnaître si un exemple donné de fonction est de l'une des formes figurant au programme. Mis à part le cas de primitives de la forme précédente, tout calcul de primitive devra comporter des indications sur la méthode à suivre. On pourra montrer l'intérêt d'exploiter les propriétés des fonctions périodiques, des fonctions paires et des fonctions impaires.
4° Exemples de résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre.	Dans le cas d'un second membre non nul, toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière seront données. On insistera sur les exemples intervenant en économie et en démographie, et notamment sur le cas des phénomènes exponentiels continus, décrits par une équation du type $y' \quad ay$, où a est constant.
5° Exemples d'étude de situations conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques.	On privilégiera les situations issues de la vie économique et sociale. En liaison avec l'économie et la gestion, on pourra être amené à étudier des situations conduisant à des suites définies par leur premier terme et une relation du type $u_{n+1} \quad a u_n + b$; mais toutes les indications utiles devront être fournies pour se ramener à l'étude d'une suite géométrique.

MODELISATION GEOMETRIQUE 1

Parmi les modèles mathématiques qui sont la base de la conception des courbes ou des surfaces en C.A.O. et en C.F.A.O. (Conception, Fabrication, Assistées par Ordinateur), le modèle de Bézier est un des plus utilisés. Il est le plus accessible pour une introduction à la modélisation interactive des formes.

L'étude de ce modèle, restreinte aux courbes du plan, est suffisante pour comprendre son intérêt.

Des présentations différentes permettront de dévoiler une partie de la « boîte noire » de ce modèle. L'appui sur des exemples de courbes de degré 2 ou 3 permet d'éviter une complexité calculatoire sans nuire aux utilisations réelles qui, souvent, concernent le degré 3.

L'objectif principal est la compréhension des liens entre ce modèle et la conception des formes. Il convient d'éviter les considérations théoriques hors de cet objectif.

L'étude des courbes définies par une représentation paramétrique sera développée dans ce contexte avec un paramètre variant dans l'intervalle [0 ; 1] et des fonctions polynomiales de degré 2 ou 3, l'étude du sens de variation de ces fonctions et de la tangente en un point d'une courbe.

Modèle de Bézier

L'ordre d'étude des différentes présentations est libre ; on fera les liaisons entre celles-ci.
Les propriétés issues du calcul barycentrique seront mises en évidence.

a) Présentation du modèle par vecteurs et contraintes.	
b) Présentation du modèle par points de définition et polynômes de Bernstein.	Certaines propriétés des polynômes de Bernstein seront étudiées pour prouver que la courbe de Bezier ne dépend pas du repère choisi et pour analyser la forme de la courbe.
c) Présentation du modèle par une suite de vecteurs. Construction géométrique d'un point de la courbe.	

Travaux pratiques

1° Exemples de courbes de Bézier définies par vecteurs et contraintes.	
2° Exemples de courbes de Bézier définies par points de définition et polynômes de Bernstein.	On pourra donner des exemples de passage du degré 2 au degré 3 en utilisant deux fois le point intermédiaire
3° Exemples de courbes de Bézier définies par une suite de vecteurs.	
4° Exemples de formes réalisées par jonction d'arcs de courbes de Bézier	Ce sera l'occasion de passer du modèle de Bézier qui déforme globalement l'arc à une utilisation où l'on peut modifier localement chaque arc