Le B.O. N° 6 27 SEPT. 2001 HORS-SÉRIE

NOMBRES COMPLEXES 2

Les premiers éléments de l'étude des nombres complexes ont été mis en place en première et terminale technologique, en liaison avec l'enseignement des sciences physiques. Les objectifs sont de mettre en œuvre et de compléter cet acquis, d'une part pour fournir des outils qui sont utilisés en électricité, en mécanique et en automatique, d'autre part pour mettre en évidence les interprétations géométriques et les interventions des nombres complexes en analyse : fonctions à valeurs complexes et représentations géométriques associées, calcul intégral, résolution d'équations différentielles.

a) Forme algébrique $z = x + \mathrm{i}\,y$.
Représentation géométrique.
Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto \mathscr{R}e(z)$ et $z \mapsto \mathscr{I}m(z)$.

La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas au programme.
Les étudiants doivent connaître la notation $z = x + \mathrm{j}\,y$, utilisée en électricité.

b) Module d'un nombre complexe ; argument d'un nombre complexe non nul.
Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; forme trigonométrique $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $r > 0$.
Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto |z - a|$ et $z \mapsto \operatorname{Arg}(z - a)$.

Le repérage polaire $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où ρ est de signe quelconque, est hors programme.

c) Formule de Moivre. Formules d'Euler.

d) Transformations élémentaires : translation associée à $z \mapsto z + b$, similitude directe associée à $z \mapsto az$, symétrie associée à $z \mapsto \bar{z}$, inversion complexe associée à $z \mapsto \dfrac{1}{z}$.

On se bornera à l'étude de l'image d'une droite ou d'un cercle et à la conservation de l'orthogonalité.
Pour l'inversion complexe, les cercles considérés passent par l'origine ; l'inversion géométrique est hors programme.

Travaux pratiques

1° Linéarisation de polynômes trigonométriques.

Dans le cas d'un exposant supérieur ou égal à 4, le résultat sera obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

2° Résolution des équations du second degré à coefficients complexes.

L'étude systématique des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe est hors programme.

3° Exemples d'étude de transformations associées à $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$.

On donnera les indications permettant de ramener l'étude de telles transformations à une succession de transformations élémentaires figurant au programme. On se bornera aux images de droites (ou de parties de droite) ou de cercles (ou d'arcs de cercle).
On pourra faire le lien avec certains diagrammes de Nyquist utilisés en électronique.
On pourra également être amené à étudier d'autres exemples simples de transformations, telles que celles associées à $z \mapsto z^2$ ou à $z \mapsto \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, en mettant en place les familles de courbes orthogonales associées ; mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.